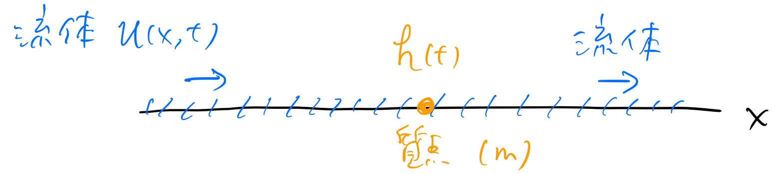
1次元圧縮性粘性流体中を運動する質点の長時間挙動について

小池 開 (東工大)

§1 イントロ: 粘性 Burgers 流体中の質点運動



<u>定式化</u>

$\nu > 0$: 粘性係数

$$
(1) \cdots \begin{cases}
u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = \nu u_{xx}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{h(t)\},\ t>0, \\
m h''(t) = F[u](t), & t > 0, \\
u(h(t)+0, t) = u(h(t)-0, t) = h'(t), & t > 0, \\
h(0) = h_0,\ h'(0) = h_0'\ ;\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \{h_0\}
\end{cases}
$$

$F[u](t)$ はどんな形？ : 運動量保存則

$$
0 = \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx + m h'(t)\right]
$$

$$
= \frac{d}{dt}\left[\left(\int_{-\infty}^{h(t)} + \int_{h(t)}^{\infty}\right) u(x,t)\,dx + m h'(t)\right]
$$

$$
= h'(t)\underbrace{\left[\cancel{u(h(t)-0,t) - u(h(t)+0,t)}\right]}_{(1)}{=0}
$$

$$
+ \left[\left(\int_{-\infty}^{h(t)} + \int_{h(t)}^{\infty}\right) \overset{(1)\ /\!/\ \left(-\frac{u^2}{2}+\nu u_x\right)_x}{u_t(x,t)}\,dx\right] + m h''(t)
$$

$$
= -\left[\!\left[-\underbrace{\cancel{\left(\frac{u^2}{2}\right)}}_{(1)\ =0} + \nu u_x \right]\!\right](h(t),t) + m h''(t).
$$

ここで $[\![f]\!](x,t) = f(x+0,t) - f(x-0,t)$.

$$\therefore \quad \boxed{F[u](t) = [\![\nu u_x]\!](h(t),t)}$$

<u>Q.</u> 系の長時間挙動？とくに $h'(t)$ の長時間挙動？

<u>定理1</u> (Vázquez-Zuazua, '06) 文献[7]

$u_0 \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ のとき,

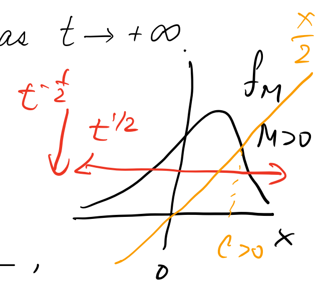
$$t^{1/2} \| u(t) - \bar{u}(t) \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad t \to +\infty.$$

ここで

$$\bar{u}(x,t) = \frac{1}{t^{1/2}} f_M(x/t^{1/2}),$$

$$f_M(x) = \sqrt{\frac{\nu}{2}} \frac{(e^M - 1)\, e^{-\frac{x^2}{2\nu}}}{\sqrt{\pi} + (e^M - 1)\int_{x/\sqrt{2\nu}}^{\infty} e^{-y^2}\, dy},$$

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\, dx + m h_0'.$$



<u>系1</u> $M > 0$ とする. このとき

$$t^{1/2} \left| h'(t) - \frac{c}{2\sqrt{t}} \right| \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad t \to +\infty.$$

ここで $c > 0$ は方程式

$$f_M(c) = c/2$$

の解である.

$t^{-1/2} | h(t) - \sqrt{t} | \to 0$

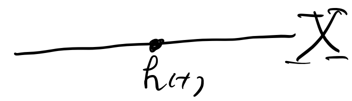
as $t \to \infty$

<u>問題点.</u> Burgers 方程式 はトイモデル：とくに

$$\left| \int_0^\infty h'(t)\, dt \right| = +\infty$$

Q. 圧縮性 Navier–Stokes eq で同様の問題を考えると?

§2 1次元圧縮性粘性流体中の質点運動



定式化

$P(\rho) = C_0 \rho$

$\rho(X,t)$：密度, $U(X,t)$：流速, $P(\rho)$：圧力 (状態方程式)

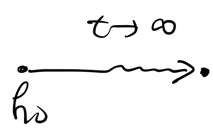
$$
(2) \cdots \begin{cases}
\rho_t + (\rho U)_X = 0, & X \in \mathbb{R} \setminus \{h(t)\},\ t > 0, \\
(\rho U)_t + (\rho U^2)_X + P(\rho)_X = \nu U_{XX}, & X \in \mathbb{R} \setminus \{h(t)\},\ t > 0, \\
m h''(t) = [\![-P(\rho) + \nu U_X]\!](h(t),t), & t > 0, \\
h(0) = h_0,\ h'(0) = h_0';\ \rho(X,0) = \rho_0(X),\ U(X,0) = U_0(X), & X \in \mathbb{R} \setminus \{h_0\}
\end{cases}
$$

結果

$$V(t) := h'(t) \sim t^{-\frac{3}{2}} \quad \text{as} \quad t \to +\infty$$

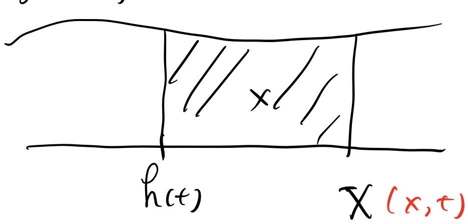
とくに

$$\left| \int_0^\infty V(t)\, dt \right| < +\infty$$



準備：Lagrange 質量座標系

$\rho(X,t) \geq C_0 > 0$



$$x = \int_{h(t)}^{X(x,t)} \rho(Y,t)\, dY$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}\setminus\{h(t)\} & \overset{1\text{ to }1}{\longleftrightarrow} & \mathbb{R}_* := \mathbb{R}\setminus\{0\} \\
\cup\!\!\!\!\;\shortmid & & \cup\!\!\!\!\;\shortmid \\
X & \longleftrightarrow & x \\
\text{Euler} & & \text{Lagrange}
\end{array}
\qquad \rho = \frac{\rho_0}{v}$$

$$v(x,t) := \frac{1}{\rho(X(x,t),t)}, \quad u(x,t) = U(X(x,t),t), \quad p(v) = P\left(\frac{1}{v}\right)$$

(2) は 次と同値

$$\mathbb{R}\setminus\{0\} \;\text{"}$$

NS

(3)$_1$ …

(3) …

Newton

ICs

$$\begin{cases}
v_t - u_x = 0, & x \in \mathbb{R}_*,\ t>0, \\
u_t + p(v)_x = \nu\left(\dfrac{u_x}{v}\right)_x, & x \in \mathbb{R}_*,\ t>0, \\
m h''(t) = \left[\!\left[-p(v) + \nu \dfrac{u_x}{v} \right]\!\right](0,t), & t>0, \\
h'(0) = h'_0;\ v(x,0) = v_0(x),\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}_*
\end{cases}$$

BC: $u(\pm 0, t) = h'(t),\ t>0$

注 質点の Lagrange 座標は $x=0$

§2.1 主定理

準備 線形化方程式の構造

(3)$_1$ は 定常解 $(v,u) = (1,0)$ を持ち、このまわりで線形化すると:

$$(3)_{1L} \cdots \begin{cases} v_t - u_x = 0, \\ u_t - c^2 v_x = \nu u_{xx} \end{cases} ; \quad c = \sqrt{-p'(1)}, \quad -p'(1) > 0$$

$p(v) = \frac{c_0}{v}$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} v-1 \\ u \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$$

$$(3)_{1L} \iff \underline{\vec{u}_t + A\vec{u}_x = B\vec{u}_{xx}}$$

A は固有値 $\lambda_1 = c$, $\lambda_2 = -c$ を持ち, 対応する右・左固有ベクトル r_i, l_i $(i=1,2)$ として次が取れる:

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{2c}{p''(1)}\begin{pmatrix} -1 \\ c \end{pmatrix}, & r_2 = \dfrac{2c}{p''(1)}\begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}, \\ l_1 = \dfrac{p''(1)}{4c}\begin{pmatrix} -1 & \dfrac{1}{c} \end{pmatrix}, & l_2 = \dfrac{p''(1)}{4c}\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{c} \end{pmatrix} \end{cases}$$

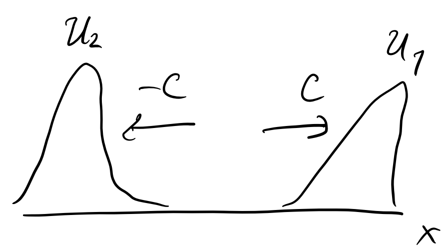
$\neq 0$

$\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$

解の固有基底による分解

$M_1^2 - M_2^2$ $\neq 0$ $= 0$ $V(t) \sim t^{-\frac{7}{4}}$

$$\begin{cases} \vec{u} = \begin{pmatrix} v-1 \\ u \end{pmatrix} = u_1 r_1 + u_2 r_2, \\ u_i = l_i \vec{u} \end{cases}$$



粘性 Burgers 方程式の自己相似解 : 拡散波

次の方程式の解 θ_i を拡散波という:

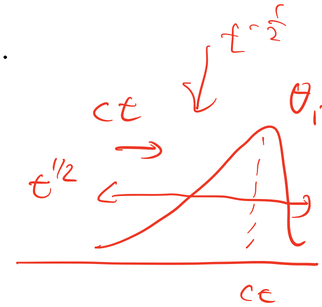
$$\begin{cases} \partial_t \theta_i + \lambda_i \partial_x \theta_i + \left(\dfrac{\theta_i^2}{2}\right)_x = \nu \partial_x^2 \theta_i, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \theta_i(x, -1) = M_i \delta(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

ここで

$$M_i = \int_{-\infty}^{\infty} l_i \begin{pmatrix} v_0 - 1 \\ u_0 \end{pmatrix}(x)\,dx + l_i\begin{pmatrix} 0 \\ m h_0' \end{pmatrix}.$$

θ_i は具体的に解けて,

$$\theta_i(x,t) = \frac{1}{(t+1)^{1/2}}\, f_{M_i}\!\left(\frac{x-\lambda_i(t+1)}{(t+1)^{1/2}}\right).$$



定理2 (Koike, '20) 文献[2]

$v_0 - 1,\ u_0 \in H^4(\mathbb{R}_*)$ とし, $^\exists \alpha > 0$ s.t.

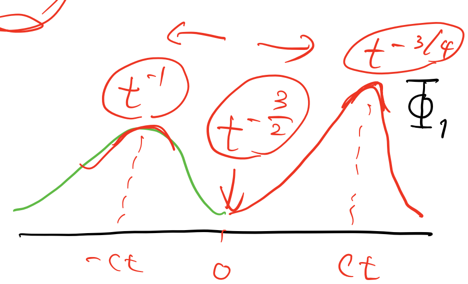
$$\varepsilon = \|v_0 - 1\|_4 + \|u_0\|_4 + \sup_{x\in\mathbb{R}_*} (|x|+1)^{2+\alpha}\left\{|(v_0-1)(x)| + |u_0(x)|\right\} \ll 1$$

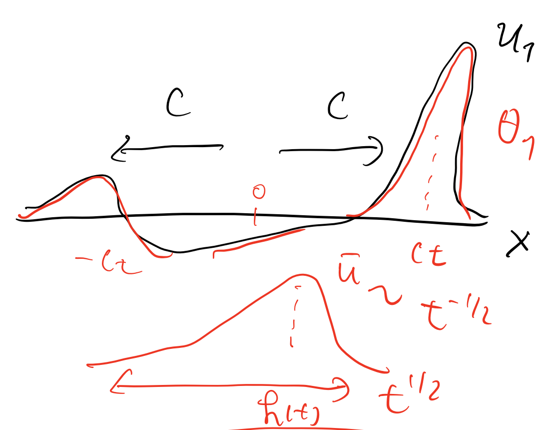
とし,

$$\Phi_i(x,t) = \left[(x-\lambda_i(t+1))^2 + (t+1)\right]^{-3/4} + \left[|x-\lambda_{3-i}(t+1)|^3 + (t+1)^2\right]^{-1/2}$$

とおく. このとき次の各点評価が成り立つ:

(4) … $|(u_i - \theta_i)(x,t)| \le C\varepsilon\, \Phi_i(x,t) \quad (x\in\mathbb{R}_*,\ t>0).$





系2 定理2の仮定のもと,

$$\boxed{V(t) = h'(t) = O(t^{-3/2}) \quad \text{as } t\to\infty}$$

(証明)

BC

$$\boxed{V(t)} = u(\pm 0, t) = \frac{2c^2}{p''(1)} (u_1 + u_2)(\pm 0, t)$$

$\rho''(t)$

(4)

$$\sim \frac{2c^2}{p''(1)} (\Phi_1 + \Phi_2)(0, t) = O(t^{-3/2}) \qquad \square$$

Remark

文献[7]

(i) 初期値問題についての Liu-Zeng ('97) の拡張になっている.

(ii) 実は $x=0$ と $x=-\lambda_i t$ 近傍での主要部も取り出せて (K., '21)

$$\boxed{C^{-1} t^{-3/2} \le |V(t)|} \qquad (t \gg 1)$$

文献[3]

が示せる (例外的な初期値を除く).

§2.2 証明: Green 関数の各点評価の方法

Liu

CNS $(3)_1$ $\iff$

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0 \\ u_t - c^2 v_x = \nu u_{xx} + N_x \end{cases}$$

ここで

$$N = -p(v) + p(1) - c^2 (v-1) - \nu \frac{v-1}{v} u_x = O\big((v-1)^2, (v-1) u_x\big)$$

基本解 $G(x,t) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ を次の方程式の解として定める:

$$\begin{cases} G_t + A G_x = B G_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ G(x, 0) = \delta(x) \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Duhamel の原理から, 初期値問題ならば,

$$\begin{pmatrix} V-1 \\ u \end{pmatrix}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)\begin{pmatrix} V_0-1\\ u_0\end{pmatrix}(y)\,dy + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t-s)\begin{pmatrix}0\\N_x\end{pmatrix}(y,s)\,dy\,ds$$

という積分方程式が成り立つ.

<u>質点のある (3) の場合</u>：Laplace変換を用いた解析 (cf 文献 [5, 6])

<u>命題1</u> s を時間Laplace変数とし, $\lambda = \frac{s}{\sqrt{\nu s + c^2}}$ とおく.
また

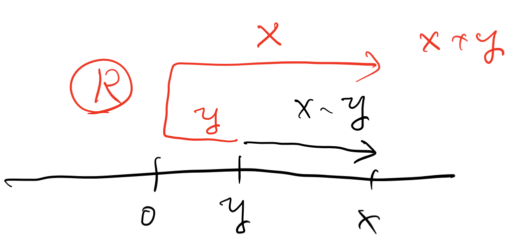
$$G_T(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{\lambda+2}\mathcal{L}[G]\right],\quad G_R(x,t) = (G-G_T)(x,t)\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}$$

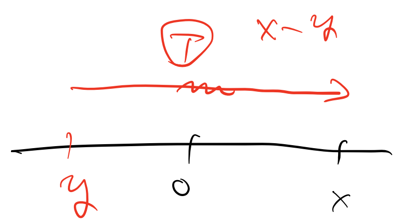
とおくと, このとき $x>0$ について次が成り立つ:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} V-1 \\ u \end{pmatrix}(x,t) &= \int_0^{\infty} G(x-y,t)\begin{pmatrix} V_0-1\\ u_0\end{pmatrix}(y)\,dy + \int_0^t\int_0^{\infty} G(x-y,t-s)\begin{pmatrix}0\\N_x\end{pmatrix}(y,s)\,dy\,ds \\ &+ \int_0^{\infty} G_R(x+y,t)\begin{pmatrix} V_0-1\\ u_0\end{pmatrix}(y)\,dy + \int_0^t\int_0^{\infty} G_R(x+y,t-s)\begin{pmatrix}0\\N_x\end{pmatrix}(y,s)\,dy\,ds \\ &+ \int_{-\infty}^{0} G_T(x-y,t)\begin{pmatrix} V_0-1\\ u_0\end{pmatrix}(y)\,dy + \int_0^t\int_{-\infty}^{0} G_T(x-y,t-s)\begin{pmatrix}0\\N_x\end{pmatrix}(y,s)\,dy\,ds \\ &+ G_T(x,t)\begin{pmatrix}0\\ m h_0'\end{pmatrix} + \int_0^t G_T(x,t-s)\begin{pmatrix}0\\ [\![N]\!]\end{pmatrix}(0,s)\,ds \end{aligned}$$

ℓ_i

(5) ...





証明のおおまかなステップ

1. ・u_i の積分方程式を書き下す： $\ell_i \cdot (5)$

   ・θ_i の積分方程式を書き下す：熱核を用いる

   $\Rightarrow$ $v_i := u_i - \theta_i$ の積分方程式を得る

2. ・文献[6,8]で $G(x,t)$ の詳しい各点評価が得られている：

   （Fourier 逆変換に Cauchy の積分定理を上手く用いる）

   ・$G_T(x,t)$, $G_R(x,t)$ の各点評価を導く：文献[1]を精密化する

   （最近、より一般性の高い方法も開発した）

3. *Ansatz* $v_i = u_i - \theta_i$ は (4) を時刻 $T>0$ までみたす

   (4)… $|(u_i - \theta_i)| \le C\varepsilon \Phi_i(x,t)$

   ・上記の ansatz から N の各点評価を行い，G, G_T, G_R の各点評価と合わせて，積分方程式の右辺の評価を行う

   $\Rightarrow$ v_i は Ansatz を $T+\delta$ までみたす

☆ θ_i を u_i から引くことによる cancellation をきちんと取り出す!