Bernstein 型問題の研究の最近の進展について

川上 裕（Yu KAWAKAMI）

金沢大学理工研究域数物科学系

2021 年 7 月 9 日：東京理科大学理工学部数学科談話会

Outline

本講演の目的

グラフ曲面の Bernstein 型問題の最近の研究結果の紹介

1. $\mathbf{R}^3$ の極小グラフに対する Bernstein の定理の歴史
2. $\mathbf{R}^3$ の平均曲率一定（CMC）グラフに対する Bernstein 型定理
3. $\mathbf{L}^3$ のグラフ曲面に対する Bernstein 型定理について

1．$\mathbf{R}^3$ の極小グラフに対する Bernstein の定理の歴史

$\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 領域
$X\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ C^r 級はめ込み $(r \geq 2)$

Definition

曲面 $X(\Omega)$ の平均曲率が恒等的に 0 となるとき，
その曲面を極小曲面（minimal surface）と呼ぶ．

非径数表示（non-parametric form）

$$X(x,y) = (x, y, f_3(x,y), \dots, f_n(x,y)), \quad f_k(x,y) \in C^2(\Omega, \mathbf{R})$$

のとき，この曲面が極小曲面であるための条件は次のようになる：

$$\left(1+\sum_{r=3}^{n}\left(\frac{\partial f_r}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2} - 2\sum_{r=3}^{n}\left(\frac{\partial f_r}{\partial x}\frac{\partial f_r}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 f_k}{\partial x \partial y} + \left(1+\sum_{r=3}^{n}\left(\frac{\partial f_r}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f_k}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

(1) を極小曲面方程式系（system of minimal surface equations）と呼ぶ．

$\mathbf{R}^3$ における極小曲面方程式

$n = 3$ のとき，$f_3(x, y)$ を $\Phi(x, y)$ とすると，(1) は

$$(1 + \Phi_y^2)\Phi_{xx} - 2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + (1 + \Phi_x^2)\Phi_{yy} = 0 \tag{2}$$

と 2 階の非線形楕円型偏微分方程式となる．

Note: 極小曲面方程式 (2) は，Φ の勾配 $\nabla\Phi := (\Phi_x, \Phi_y)$ を使って

$$\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\Phi}{\sqrt{1 + |\nabla\Phi|^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Phi_x}{W}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Phi_y}{W}\right) = 0 \tag{3}$$

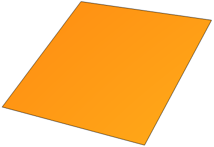
（$W := \sqrt{1 + \Phi_x^2 + \Phi_y^2}$）と発散を用いた方程式で表すことができる．

関数 Φ のグラフ

$$\Gamma_\Phi := \{(x, y, \Phi(x, y)) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in \Omega\}$$

極小曲面方程式を満たす例

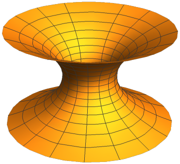
- **平面（plane）**　（自明な例）
  $\Omega = \mathbf{R}^2$, $\Phi(x, y) = ax + by + c \ (a, b, c \in \mathbf{R})$



- **常螺旋面（helicoid）**　（線織面かつ極小曲面となる唯一の例）
  $\Omega = \mathbf{R}^2 \backslash (0, 0)$, $\Phi(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$

極小曲面方程式を満たす例と Bernstein の定理

- **懸垂面（catenoid）**　（回転面かつ極小曲面となる唯一の例）
  $\Omega = \mathbf{R}^2 \backslash \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$, $\Phi(x, y) = \cosh^{-1} \sqrt{x^2 + y^2}$



Theorem (Bernstein の定理)

$\mathbf{R}^2$ 全体で定義される極小曲面の方程式 (2) の解は,
自明な解（ここでは, x, y の 1 次式のこと）のみである.

Note: 上の主張を幾何学的に述べると,
"$\mathbf{R}^2$ 全体で定義される極小グラフは平面のみである" となる.

S. N. Bernstein による証明について (1)

Serge Natanovich Bernstein （1880～1968）

- パリ大学で学位取得．C. E. Picard に師事．
- 学位論文で，楕円型偏微分方程式の問題である Hilbert の第 19 問題を解く（1904 年）．
- 専門は楕円型偏微分方程式，確率論，構成的関数論．

S. N. Bernstein による Bernstein の定理の論文

- S. Bernstein, Sur un théorème de géométrie et ses applications aux équations aux dérivées partielles du type elliptique, Comm. de la Soc. Math. de Kharkov (2éme sér.) **15**, 38–45 (1915–1917).
- S. Bernstein, Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, Math. Z. **26** (1927), 551–558.（上の論文のドイツ語訳）

S. N. Bernstein による証明について (2)

S. N. Bernstein は，以下の定理の系として Bernstein の定理を導いた．

Theorem (Liouville の定理の一般化，Bernstein (1915))

関数 $a(x,y), b(x,y), c(x,y)$ が次の条件を満たすものとする：

$$\begin{pmatrix} a(x,y) & b(x,y) \\ b(x,y) & c(x,y) \end{pmatrix} \text{ が各 } (x,y) \in \mathbf{R}^2 \text{ で正定値である．}$$

関数 $f \in C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ を

$$\begin{cases} a(x,y)f_{xx} + 2b(x,y)f_{xy} + c(x,y)f_{yy} = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^2 \\ f(x,y) = o(\sqrt{x^2+y^2}) \quad \text{as} \quad \sqrt{x^2+y^2} \to +\infty \end{cases} \tag{4}$$

の解とする．このとき，f は定数関数となる．

Note: $a = c \equiv 1$, $b \equiv 0$ で f の有界性を仮定すれば，
上の定理は調和関数に対する Liouville の定理となる．

S. N. Bernstein による証明について (3)

先の定理を用いて，Bernstein の定理を証明する．

Proof.

極小曲面方程式 (2) の任意の解は実解析である．また，(2) から，

$$\varphi_1 = \arctan(\Phi_x), \qquad \varphi_2 = \arctan(\Phi_y)$$

は次の偏微分方程式の $\mathbf{R}^2$ 上の有界な解となる：

$$(1+(\Phi_y)^2)(\varphi_i)_{xx} - 2\Phi_x\Phi_y(\varphi_i)_{xy} + (1+(\Phi_x)^2)(\varphi_i)_{yy} = 0 \quad (i=1,2).$$

そこで，

$$a(x,y) = 1+(\Phi_y)^2, \quad b(x,y) = -\Phi_x\Phi_y, \quad c(x,y) = 1+(\Phi_x)^2$$

として，先の定理を適用することで，$\nabla\Phi = (\Phi_x, \Phi_y)$ は定数である．
(4) における無限遠の挙動の仮定から，Φ は x, y の 1 次式となる． □

S. N. Bernstein による証明について (4)

Liouville の定理の一般化の結果の証明は次の通りである：
楕円型の条件 (4) から,

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \leq 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^2$$

で，等号が成り立つのは $f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = 0$ となる点である．

Lemma (Bernstein（Gap 有）; Hopf, Mickle (1950))

$f \in C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ とする．$\mathbf{R}^2$ 上で $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \leq 0$（つまり Γ_f の Gauss 曲率 K が $K \leq 0$）で，$\mathbf{R}^2$ のある点で $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$（つまり $K < 0$）となるとき，f は “$\sqrt{x^2+y^2} \to +\infty$ のとき $o(\sqrt{x^2+y^2})$ となる” ことはない．

上の補題と条件 (4) から，$\mathbf{R}^2$ 上で $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \equiv 0$ となり，

$$f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = f_{yx} = 0$$

となるので，f は x, y の 1 次式となる．
さらに無限遠の条件から f は定数関数となる．□

Review：Cauchy の係数評価から Liouville の定理を導く

Theorem (Cauchy の係数評価)

$\Delta_R = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < R\}$ 原点中心半径 $R(>0)$ の開円板
複素関数 $f(z)$ が Δ_R で正則（*holomorphic*）かつ，$|f(z)| \leq M$（M は定数）となるとき

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R}$$

となる．

Corollary (Liouville の定理)

$f(z)$ は $\mathbf{C}$ で正則でかつ有界ならば，定数関数である．

Proof.

$R \to +\infty$ とすることで，$\mathbf{C}$ で $f' = 0$ となることがわかる．
よって，f は定数関数である． □

E. Heinz による証明について (1)

Ref.

- E. Heinz, Über die Lösungen der Minimalflächengleichung (German), Nachr. Akad. Wiss. Gättingen. Math.-Phys. Kl. Math.-Phys.-Chem. Abt. 1952 (1952), 51–56.
- R. Osserman, A survey of minimal surfaces, Second edition, Dover Publications, Inc., 1986.
- W. Jäger, S. Friedrich, Professor Dr. Dr.h.c. Erhard Heinz (1924–2017) in memoriam (German), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **122** (2020), 3–33.

Erhard Heinz (1924～2017)

- ゲッティンゲン大学で学位し，在籍する．Franz Relich に師事．
- 専門は楕円型偏微分方程式，微分幾何学．

E. Heinzによる証明について (2)

Theorem (Heinz, 1952)

$\Delta_R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2+y^2 < R^2\}$ 原点中心半径 $R(>0)$ の開円板 Δ_R 上で定義される極小曲面

$$\Gamma_\Phi = \{(x,y,\Phi(x,y)) \,|\, (x,y) \in \Delta_R\}$$

のガウス曲率 K に対して，ある正の定数 C_0 が存在して

$$|K| \le \frac{C_0}{R^2}$$

が成り立つ．

- $R \to +\infty$ とすれば，Bernstein の定理が成り立つ．
- Heinz は $C_0 = 4\pi^3/3$ で証明する．Finn と Ossermann（1964）により $\pi^2/6 < C_0 < 6$ まで改良される．

$\mathbf{R}^3$ の CMC グラフに対する Bernstein 型の定理 (1)

Ref.

- E. Heinz, Über Fächen eineindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind. (German) Math. Ann. **129** (1955), 451–454.
- 剱持勝衛，曲面論講義 平均曲率一定曲面入門，培風館，2000 年.

関数 Φ のグラフ $\Gamma_\Phi := \{(x, y, \Phi(x, y)) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in \Omega\}$ の平均曲率 H

$$H = \frac{1}{2}\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\Phi}{\sqrt{1+|\nabla\Phi|^2}}\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Phi_x}{W}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Phi_y}{W}\right)\right\}$$

（ただし，$W := \sqrt{1+\Phi_x^2+\Phi_y^2}$）と発散形で表すことができる.

Corollary (CMC グラフに対する Bernstein 型定理)

$\mathbf{R}^2$ 全体で定義される $\mathbf{R}^3$ の平均曲率一定グラフは平面のみである.

$\mathbf{R}^3$ の CMC グラフに対する Bernstein 型の定理 (2)

Theorem (Heinz, 1955)

$\Delta_R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < R^2\}$ 原点中心半径 $R(> 0)$ の開円板
$\Phi \in C^2(\Delta_R, \mathbf{R})$ で，Γ_Φ の平均曲率 H が，ある正の数 α に対して，
Δ_R 上で

$$|H| \geq \alpha > 0$$

を満たすならば，

$$\alpha \leq \frac{1}{R}$$

が成り立つ．

Proof.

Heinz の定理から，$|H| \leq R^{-1}$ が成り立つので，$R \to +\infty$ とすると
$H \equiv 0$ となり，Bernstein の定理から主張を得る． $\square$

Heinz の定理の証明

この定理の証明では幾何学と微積分学とが見事に融合している．

剱持勝衛「曲面の微分幾何」 in 「可視化の技術と現代幾何学」より

$0 < R_1 < R$ を満たす任意の R_1 を取る．Green の定理より

$$\iint_{\Delta_R} 2H\,dxdy = \oint_{x^2+y^2=R_1^2} \left(-\frac{\Phi_y}{W}\,dx + \frac{\Phi_x}{W}\,dy \right).$$

必要ならば法ベクトルを取り換えることで $H \geq \alpha > 0$ としてよい．
上式の左辺は (左辺) $\geq 2\alpha\pi R_1^2$ を得る．
一方，右辺は Cauchy-Schwarz の定理より

$$\begin{aligned} \oint_{x^2+y^2=R_1^2} \left(-\frac{\Phi_y}{W}\,dx + \frac{\Phi_x}{W}\,dy \right) &\leq \oint_{x^2+y^2=R_1^2} \sqrt{\frac{|\nabla\Phi|^2}{1+|\nabla\Phi|^2}}(dx^2+dy^2)^{1/2} \\ &\leq \oint_{x^2+y^2=R_1^2} (dx^2+dy^2)^{1/2} = 2\pi R_1. \end{aligned}$$

よって，$2\alpha\pi R_1^2 \leq 2\pi R_1$ が成り立つので，$R_1 \to R$ で定理を得る．

$\square$

Part 2：Lorentz-Minkowski 空間のグラフ曲面の話

$\mathbf{R}^3_1 = (\mathbf{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_L)$：3 次元 Lorentz-Minkowski 空間

Lorentz 計量

$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbf{R}^3$ に対し

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle_L := x_1 x_2 + y_1 y_2 - z_1 z_2.$$

空間的・時間的はめ込み

$\Omega \subset \mathbf{R}^2$：領域
はめ込み $X : \Omega \to \mathbf{R}^3_1$ が

- 空間的（space-like）$\Longleftrightarrow$ X による誘導計量が Ω 上で Riemann 計量
- 時間的（time-like）$\Longleftrightarrow$ X による誘導計量が Ω 上で Lorentz 計量

$\mathbf{R}^3_1$ の極大グラフ

Definition

$X : \Omega \to \mathbf{R}^3_1$: C^r 級空間的はめ込み $(r \geq 2)$
曲面 $X(\Omega)$ の平均曲率が恒等的に 0 となるとき,
その曲面を極大曲面（maximal surface）と呼ぶ.

非径数表示（non-parametric form）

$$X(x,y) = (x, y, \Psi(x,y)), \quad \Psi(x,y) \in C^2(\Omega, \mathbf{R}).$$

X が空間的はめ込み $\Leftrightarrow 1 - |\nabla\Psi|^2 > 1 \Leftrightarrow |\nabla\Psi| < 1.$
$\mathbf{R}^3_1$ の空間的グラフ

$$\Gamma_\Psi = \{(x, y, \Psi(x,y)) \,|\, (x,y) \in \Omega\}$$

が極大曲面となる条件は

$$(1 - \Psi_y^2)\Psi_{xx} + 2\Psi_x\Psi_y\Psi_{xy} + (1 - \Psi_x^2)\Psi_{yy} = 0. \quad (5)$$

この方程式を ZMC 方程式と呼ぶ.

Calabi-Bernstein の定理

Ref.

- E. Calabi, Examples of Bernstein problem for some nonlinear equations, Proc Symp. Pure Appl. Math. 15, 223–230 (1968).
- S. Akamine, M. Umehara, K. Yamada, Improvement of the Bernstein-type theorem for space-like zero mean curvature graphs in Lorentz-Minkowski space using fluid mechanical duality, Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B 7, 17–27 (2020) .

Theorem (Calabi-Bernstein の定理)

$\Psi(x, y) \in C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ で，$|\nabla\Psi| < 1$ かつ ZMC 方程式を満たすならば，Ψ は x, y の 1 次式である．

Note : 上の主張を幾何学的に述べると，
“$\mathbf{R}^2$ 全体で定義される $\mathbf{R}^3_1$ の極大グラフは空間的平面のみである” となる．

Calabi 対応（流体力学的双対性） (1)

$\Omega \subset \mathbf{R}^2$：単連結領域とする．

Theorem (Calabi 対応（流体力学的双対性）)

- $\Phi \in C^2(\Omega, \mathbf{R})$：極小曲面の方程式 (2) を満たす．
  このとき，定数の差を除いて定まる $\Psi \in C^2(\Omega, \mathbf{R})$ で

  $$\begin{pmatrix} \Psi_x \\ \Psi_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\Phi_x^2+\Phi_y^2}} \begin{pmatrix} -\Phi_y \\ \Phi_x \end{pmatrix}$$

  かつ，ZMC 方程式 (5) と $|\nabla\Psi| < 1$ を満たすものが存在する．
- $\Psi \in C^2(\Omega, \mathbf{R})$：ZMC 方程式 (5) と $|\nabla\Psi| < 1$ を満たす．
  このとき，定数の差を除いて定まる $\Phi \in C^2(\Omega, \mathbf{R})$ で

  $$\begin{pmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\Psi_x^2-\Psi_y^2}} \begin{pmatrix} \Psi_y \\ -\Psi_x \end{pmatrix}$$

  かつ，極小曲面方程式 (2) を満たすものが存在する．

これらの対応は，一方が他方の逆対応を与える．

Calabi 対応（流体力学的双対性） (2)

Calabi-Benstein の定理の証明

Ψ に対して，Calabi 対応から極小曲面の方程式を満たす $\Phi \in C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ が存在する．極小曲面の Bernstein の定理から Φ は x, y の 1 次式となるので，Calabi 対応から $\nabla\Psi$ は定数となる．よって，主張が示せる．

Note：Bers による Calabi 対応の流体力学的意味付け
Chaplygin 流体を考えたとき，Φ が速度ポテンシャルに対し，Ψ は流れ関数が対応する．このことから，Calabi 対応は「流体力学的双対性」とも呼ばれている（Akamine-Umehara-Yamada, 2020）

Calabi 対応（流体力学的双対性） (3)

Calabi 対応の証明

Φ が極小曲面方程式を満たすことから

$$\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\Phi}{\sqrt{1+|\nabla\Phi|^2}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Phi_x}{\sqrt{1+{\Phi_x}^2+{\Phi_y}^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Phi_y}{\sqrt{1+{\Phi_x}^2+{\Phi_y}^2}}\right)=0$$

が成り立つ．これは 1 次微分形式

$$\omega=-\frac{\Phi_y}{\sqrt{1+{\Phi_x}^2+{\Phi_y}^2}}\,dx+\frac{\Phi_x}{\sqrt{1+{\Phi_x}^2+{\Phi_y}^2}}\,dy$$

が閉形式であることと同値である．
Poincaré の補題から，$d\Psi=\omega$ となる $\Psi\in C^2(\Omega,\mathbf{R})$ が存在する．
Ψ が ZMC 方程式 (5) と $|\nabla\Psi|<1$ を満たすことが容易にわかる．

□

$\mathbf{R}^3_1$ の空間的 CMC グラフ

Ref.

A. Honda, Y. Kawakami, M. Koiso, S. Tori, Heinz-type mean curvature estimates in Lorentz-Minkowski space, to appear in Revista Mathemática Complutense, Open Access.

空間的グラフ $\Gamma_\Psi := \{(x, y, \Psi(x, y)) \in \mathbf{R}^3_1 \,|\, (x, y) \in \Omega\}$ の平均曲率 H

$$H = \frac{1}{2}\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\Psi}{\sqrt{1 - |\nabla\Psi|^2}}\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Psi_x}{W}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Psi_y}{W}\right)\right\}$$

（ただし，$W := \sqrt{1 - |\nabla\Psi|^2} = \sqrt{1 - \Psi_x^2 - \Psi_y^2}$）と発散形で書ける.

$\mathbf{R}^3_1$ の平均曲率一定グラフに対しては,
Bernstein の定理の主張はそのままでは成り立たない.
実際，後で述べる「双曲面（hyperbola）」など反例が存在する.

Heinz 型の平均曲率の評価

Theorem (Honda-K-Koiso-Tori, 2021)

$\Delta_R \subset \mathbf{R}^2$: 原点中心半径 R の開円板，$\Psi \in C^2(\Delta_R, \mathbf{R})$.
このとき，

$$\frac{|\nabla \Psi|}{\sqrt{1 - |\nabla \Psi|^2}} \leq M(x^2 + y^2)^k \tag{6}$$

となる $M > 0$ と $k \in \mathbf{R}$ が存在し，Γ_Ψ が空間的であるとする．
Γ_Ψ の平均曲率 H が，ある正の数 α に対して，Δ_R 上で

$$|H| \geq \alpha > 0$$

を満たすならば，

$$\alpha \leq MR^{2k-1}$$

が成り立つ．

Heinz 型の平均曲率の評価の証明について

$0 < R_1 < R$ を満たす任意の R_1 を取る．Green の定理より

$$\iint_{\overline{\Delta}_R} 2H\, dxdy = \oint_{x^2+y^2=R_1^2} \left(-\frac{\Psi_y}{W}\, dx + \frac{\Psi_x}{W}\, dy \right).$$

必要ならば法ベクトルを取り換えることで $H \geq \alpha > 0$ としてよい．
上式の左辺は（左辺）$\geq 2\alpha\pi R_1^2$ を得る．
一方，右辺は (6) と Cauchy-Schwarz の定理より

$$\begin{aligned}
\oint_{x^2+y^2=R_1^2} \left(-\frac{\Psi_y}{W}\, dx + \frac{\Psi_x}{W}\, dy \right) &\leq \oint_{x^2+y^2=R_1^2} \frac{|\nabla\Psi|}{\sqrt{1-|\nabla\Psi|^2}} (dx^2+dy^2)^{1/2} \\
&\leq MR_1^{2k} \oint_{x^2+y^2=R_1^2} (dx^2+dy^2)^{1/2} \\
&= 2\pi R_1^{2k+1}.
\end{aligned}$$

よって，$2\alpha\pi R_1^2 \leq 2R_1^{2k+1}$ が成り立つので，$R_1 \to R$ で定理を得る．

□

平面上のグラフ曲面の平均曲率の消滅定理

Corollary (Honda-K-Koiso-Tori, 2021)

平面 $\mathbf{R}^2$ 上で定義された C^2 級関数 $\Psi(x,y)$ のグラフ Γ_Ψ が空間的で，Γ_Ψ の平均曲率が一定であるとする．$\mathbf{R}^2$ 上で

$$\frac{|\nabla\Psi|}{\sqrt{1-|\nabla\Psi|^2}} \leq M(x^2+y^2)^{(1/2)-\varepsilon}$$

を満たす $M>0$ と $\varepsilon>0$ が存在するとき，Γ_Ψ の平均曲率は 0 となる．

Proof.

Heinz 型の平均曲率の評価の結果から，Δ_R 上で Γ_Ψ の平均曲率 H は $|H| \leq M/R^{2\varepsilon}$ を満たす．$R\to\infty$ とすることで $H\equiv 0$ を得る． □

勾配条件の幾何学的解釈

グラフ曲面 Γ_Ψ が空間的であるとき，

$$\nu(=\nu(x,y)) = \frac{1}{\sqrt{1-|\nabla\Psi|^2}}(\Psi_x, \Psi_y, 1)$$

は Γ_Ψ の時間的単位法ベクトル場となる．
$e_3=(0,0,1)\in\mathbf{R}^3_1$ も時間的ベクトルとなるので，

$$\langle \nu, e_3\rangle_L = -\cosh\theta$$

を満たす非負値関数 $\theta(=\theta(x,y))\geq 0$ が一意的に定まる．
この θ を，ν と e_3 の間の双曲的角度（hyperbolic angle）という．
このとき

$$\sinh\theta = \frac{|\nabla\Psi|}{\sqrt{1-|\nabla\Psi|^2}}$$

が成り立つ．

CMCグラフに対する Bernstein 型定理

Theorem (Honda-K-Koiso-Tori, 2021)

平面 $\mathbf{R}^2$ 上で定義された空間的グラフ Γ_Ψ の平均曲率が一定で，
ν と e_3 の間の双曲的角度 θ に対して，$\mathbf{R}^2$ 上で

$$\sinh\theta \leq M(x^2+y^2)^{(1/2)-\varepsilon} \tag{$\star$}$$

となる $M>0$ と $\varepsilon>0$ が存在するとき，Γ_Ψ は空間的平面となる．

Proof.

先の系（消滅定理）と双曲的角度の性質から，
仮定を満たせば平均曲率は 0 となる．
よって，Calabi-Bernstein の定理から結果が従う． □

Bernstein 型定理の最良性

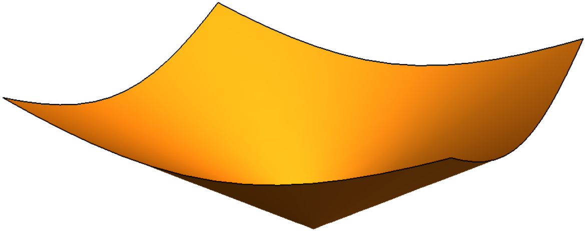
先の系の結果は最良（optimal）である．実際，

$$\Psi(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{1}{H^2}} \quad (H > 0)$$

のグラフ曲面となる双曲面（hyperboloid）は，
$\mathbf{R}^2$ 上で定義される平均曲率一定（H となる）グラフで，

$$\sinh\theta = H(x^2 + y^2)^{1/2}$$

つまり，$(\star)$ の $\varepsilon = 0$ の場合となる．



まとめ

- $\mathbf{R}^3$ の極小グラフに対する Bernstein の定理の証明は色々と知られており，その根底にあるのは Liouville の定理との対応である．
- $\mathbf{R}^3$ の CMC グラフに対する Bernstein 型定理は，Heinz の平均曲率の評価から導くことができる．
- Calabi-Bernstein の定理は，$\mathbf{R}^3$ の極小グラフと $\mathbf{R}^3_1$ の極大グラフの対応から示すことができる．
- $\mathbf{R}^3_1$ の空間的グラフ曲面に対して，関数のある種の勾配評価を仮定することで，Heinz 型の平均曲率の評価が成り立ち，その系として，$\mathbf{R}^2$ 上の CMC グラフの Bernstein 型定理を得ることができる．また，その結果は最良である．