Classification of Cartan embeddings which are austere submanifolds

木村太郎 (鶴岡工業高等専門学校)

2021 年 6 月 28 日

東京理科大学理工学部 数学科 談話会

共催　第 8 回 東京理科大学 幾何学セミナー

間下克哉氏（法政大学）との共同研究による

Contents

1 序論

目的：コンパクトリーマン対称空間におけるある種の部分多様体を分類

Theorem 1 (O. Ikawa and H. Tasaki 2000)**.**
コンパクト単純連結リー群 G における全測地的部分多様体 M が極大である必要十分条件は, M はカルタン埋め込みの像か極大リー部分群である.

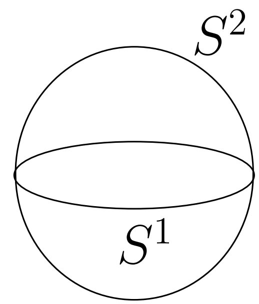
Definition 1. (N, g) をリーマン多様体とする. N がリーマン対称空間であるとは, 任意の $p \in N$ に対して, 次をみたす等長変換 s_p が存在すること：

1. $s_p \circ s_p = id_N$

2. 点 p は固定点集合 $F(s_p, N)$ の中で孤立点

Definition 2. (N, g) : リーマン対称空間, M を N の部分多様体とする. M が全測地的部分多様体であるとは, M の測地線が N の測地線になること.

Example 1. 2 次元球面 $N = S^2$ の大円の 1 次元球面 S^1 は全測地的部分多様体である.



Example 2. コンパクトリー群 G はコンパクトリーマン対称空間である.

単位元 e での点対称 s_e は $s_e(g) = g^{-1}$ で与えられ, 任意の点 g の点対称 $s_g(x) = gx^{-1}g$ で与えられる.

2 Austere 部分多様体

Definition 3. リーマン多様体の等長埋め込み $\Psi : (M, g) \to (N, h)$ の第 2 基本形式を α とする. Ψ の法ベクトル H に対して

$$h(\alpha(X, Y), H) = h(A_H(X), Y)$$

によって定まる対称線形写像 $A_H : T_pM \to T_pM$ を H が定める型作用素という. A_H の重複度を込めた固有値の集合が -1 倍で不変であるとき H を *austere normal direction* という. 全ての法ベクトル $H(\neq 0)$ が *austere normal direction* であるとき, $\Psi(M)$ を *austere* 部分多様体という.

Austere 部分多様体は極小部分多様体である.

全測地的部分多様体 $\subset$ austere 部分多様体 $\subset$ 極小部分多様体

3 カルタン埋め込み

Definition 4. G をコンパクト連結単純リー群とし, σ を有限位数の G の自己同型写像とする. $K = \{k \in G \mid \sigma(k) = k\}$ とおく. 写像 $\Psi : G \to G; g \mapsto g\sigma(g)^{-1}$ は次の写像を引き起こす：

$$\Psi_\sigma : G/K \to G; gK \to g\sigma(g)^{-1}$$

この写像を σ が引き起こすカルタン埋め込みという.

Remark 1. σ の位数が 2 のとき, カルタン埋め込みは全測地的埋め込みとなる.

問題. σ **の位数が** 3 **以上のとき, カルタン埋め込みの像が austere 部分多様体になるものを分類する.**

位数 3 の自己同型写像の分類は Wolf and Gray (1968) による分類, 位数 4 の自己同型写像の分類は J. A. Jimenez (1988) による分類がある.

G，K のリー環を，それぞれ $\mathfrak{g}$，$\mathfrak{k}$ で表す．$\mathfrak{g}$ における $\mathfrak{k}$ のキリング形式に関する直交補空間を $\mathfrak{m}$ で表し，$\mathfrak{m}$ を，等質空間 G/K の原点における接空間と同一視する．

Theorem 2 (K. Mashimo,1996)**.**
位数 3 の自己同型 σ が引き起こすカルタン埋め込み Ψ_σ が極小埋め込みとなる $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ は次の表で与えられる.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}$
$\mathfrak{su}(3m)(m \geq 1)$	$\mathfrak{su}(m) + \mathfrak{su}(m) + \mathfrak{su}(m) + \mathbb{R}^2$
$\mathfrak{so}(3m-1)(m \geq 2)$	$\mathfrak{su}(m+1) + \mathfrak{so}(2m-1) + \mathbb{R}$
$\mathfrak{sp}(3m-1)(m \geq 2)$	$\mathfrak{su}(2m-1) + \mathfrak{sp}(m) + \mathbb{R}$
$\mathfrak{so}(6m-2)(m \geq 2)$	$\mathfrak{su}(2m+1) + \mathfrak{so}(2m) + \mathbb{R}$
$\mathfrak{so}(8)$	$\mathfrak{su}(2) + \mathbb{R}^2$
$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{su}(3) + \mathfrak{su}(3) + \mathfrak{su}(3)$
$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{so}(8) + \mathbb{R}^2$
$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{su}(3) + \mathfrak{su}(6)$
$\mathfrak{e}_8$	$\mathfrak{su}(3) + \mathfrak{e}_6$
$\mathfrak{e}_8$	$\mathfrak{su}(9)$
$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{su}(3) + \mathfrak{su}(3)$
$\mathfrak{g}_2$	$\mathfrak{su}(3)$
$\mathfrak{so}(8)$	$\mathfrak{g}_2$
$\mathfrak{so}(8)$	$\mathfrak{su}(3)$

Lemma 1.
α を自己同型写像 σ に対応するカルタン埋め込み Ψ_σ の第２基本形式とする．このとき, $X, Y \in \mathfrak{m}$ に対して,

$$\alpha(X,Y) = -\frac{1}{2}[(1-d\sigma)X,(1+d\sigma)Y]_{\mathfrak{k}}.$$

Proof.

$$Y^*(g) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L_{\exp tY} R_{\sigma(\exp(-t)Y)}(g) = dL_g(Ad_{g^{-1}}Y - d\sigma Y)$$

$X \in \mathfrak{m}$ に対して,

$$X' = d\Psi_\sigma(X) = (1-d\sigma)(X)$$

とおくと,

$$\nabla_{X'}Y^* = -\frac{1}{2}[(1-d\sigma)X,(1+d\sigma)Y]$$

□

$\widetilde{\mathfrak{g}}$ を $\mathbb{C}$ 上のリー環, Δ を $\widetilde{\mathfrak{g}}$ のルート系, $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ を Δ の基本系とする. また

$$\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

をルート空間分解とする. $\mathfrak{g}_\alpha$ の基底 E_α $(\alpha \in \Delta)$ として, 次の性質をみたすものが存在する：

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha, \quad B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1,$$

$\alpha, \beta \in \Delta, \alpha + \beta \in \Delta$　ならば $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}$ $(N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta} \in \mathbb{R})$.

ここで, B は $\widetilde{\mathfrak{g}}$ のキリング形式とする. $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の基底

$$\{H_{\alpha_i}(1 \leq i \leq l), E_\alpha(\alpha \in \Delta)\}$$

を Weyl の標準基底という. Weyl の標準基底は $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の $\mathbb{C}$ 上の基底となる. また正規実形

$$\mathfrak{g}_0 = \{H_{\alpha_i}(1 \leq i \leq l), E_\alpha(\alpha \in \Delta)\}_{\mathbb{R}}$$

の $\mathbb{R}$ 上の基底となる. このとき

$$\mathfrak{g}_0 = \{X \in \widetilde{\mathfrak{g}} \mid \bar{X} = X\}$$

となる.

$$\varphi_0 : \begin{cases} H \to -H \\ E_\alpha \to E_{-\alpha} \end{cases}$$

によって, $\widetilde{\mathfrak{g}}$ または $\mathfrak{g}_0$ の自己同型が定義される.

$$\mathfrak{g}_u = \{X \in \widetilde{\mathfrak{g}} \mid \varphi_0(\bar{X}) = X\}$$

とおく. このとき

$$\sqrt{-1}H_{\alpha_i} \;\; (1 \leq i \leq l), \;\; \sqrt{-1}(E_\alpha + E_{-\alpha}), \;\; E_\alpha - E_{-\alpha} \;\; (\alpha \in \Delta)$$

は $\mathfrak{g}_u$ に含まれる. これらは, $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の $\mathbb{C}$ 上の基底, また $\mathfrak{g}_u$ の $\mathbb{R}$ 上の基底にもなる. $\mathfrak{g}_u$ を**コンパクト実形**と呼ぶ.

Theorem 3. $\mathfrak{g}_u$ はコンパクト半単純リー群 G のリー環 $\mathfrak{g}$ に同型である.

4 Austere 部分多様体の分類

Theorem 4 (T. Kimura and K. Mashimo)**.**
σ が有限位数 3 以上の内部自己同型が引き起こすカルタン埋め込み

$$\Psi_\sigma : G/K \to G; gK \to g\sigma(g)^{-1}$$

は *austere* 埋め込みではない.

外部自己同型が存在するリー環 は, $A_l(l \geq 2), D_l(l \geq 4), E_6$ に限る.

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})/\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{Aut}(D)$$

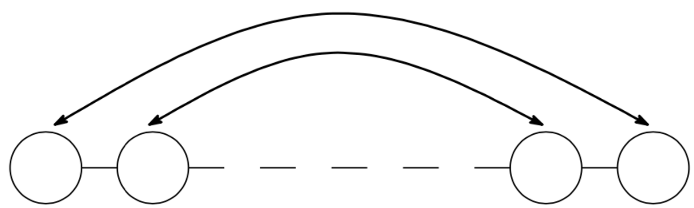
コンパクト単純リー群 G の外部自己同型 σ は

$$\sigma = \nu \circ \exp(\mathrm{ad}_H) = \exp(\mathrm{ad}_H) \circ \nu$$

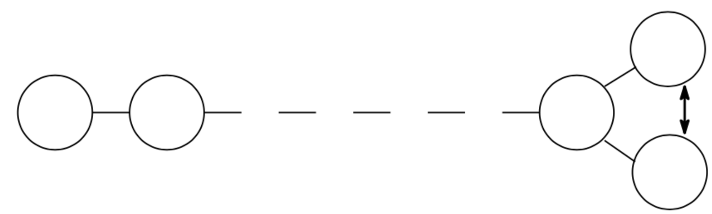
とかける. ν の位数は 2 または 3 である.

$\mathrm{order}(\nu) = 2$

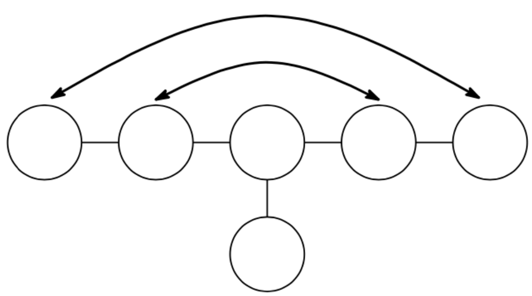
$A_l \ (2 \leq l)$



$D_l \ (5 \leq l)$

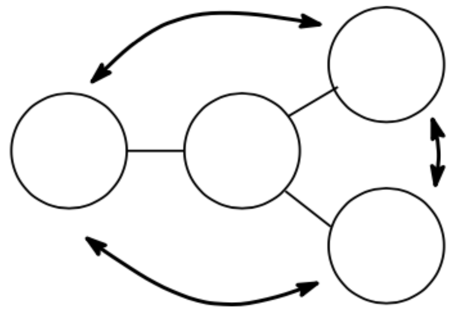


E_6



$\mathrm{order}(\nu) = 3$

D_4



Theorem 5 (T. Kimura and K. Mashimo)**.**
G をコンパクト連結単純リー群, σ を G の外部自己同型, $K = \{k \in G \mid \sigma(k) = k\}$ とする. このとき, カルタン埋め込みΨ_σ が *austere* 埋め込みならば, Ψ_σ は全測地的かσ が次の表のどれかになる.

Type of ν	$\mathfrak{k}$	$s_0, s_1, \cdots, s_n$	order
$\mathfrak{a}_2^{(2)}$	$\mathfrak{a}_1$	$s_0 = 0,\ s_1 = 1$	4
$\mathfrak{a}_{2n}^{(2)}\ (n \geq 2)$	$\mathfrak{c}_p \oplus \mathfrak{b}_{n-p}\ (1 \leq p \leq n)$	$s_p = 1,\ s_j = 0\ (j \neq p)$	4
$\mathfrak{a}_{2n-1}^{(2)}\ (n \geq 3)$	$\mathfrak{c}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$	$s_0 = s_1 = 1,\ s_2 = \cdots = s_n = 0$	4
$\mathfrak{a}_{2n-1}^{(2)}\ (n \geq 3)$	$\mathfrak{d}_p \oplus \mathfrak{c}_{n-p}\ (2 \leq p \leq n-1)$	$s_p = 1,\ s_j = 0\ (j \neq p)$	4
$\mathfrak{d}_{n+1}^{(2)}\ (n \geq 2)$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$	$s_0 = s_n = 1,\ s_2 = \cdots = s_{n-1} = 0$	4
$\mathfrak{e}_6^{(2)}$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{b}_3$	$s_1 = 1, s_0 = s_2 = s_3 = s_4 = 0$	4
$\mathfrak{d}_4^{(3)}$	$\mathfrak{g}_2$	$s_0 = 1,\ s_1 = s_2 = 0$	3
$\mathfrak{d}_4^{(3)}$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$	$s_1 = 1,\ s_0 = s_2 = 0$	6

σ は $\mathfrak{g}$ の $(s_0, s_1, \cdots, s_n; \mathfrak{g}_n^{(d)})$ 型の外部自己同型である. (cf. Helgason)

この結果と関連する研究

O. Ikawa, σ-actions and symmetric triads, Tohoku Math. J. (2) 70 (2018), 547–565.

5 安定性

$\{M_t\}$ をGにおける$M=G/K$における滑らかな変分,Vをその変分ベクトル場, $\{e_i\}$ を M の局所直交フレームとする. $\mathrm{End}(N(M))$ の切断 S, A を次で定義する.

$$h(S(\xi),\eta)=\sum_i h(R^G(e_i,\xi)e_i,\eta),\quad h(A(\xi),\eta)=\sum_{i,j} h(\alpha(e_i,e_j),\xi)h(\alpha(e_i,e_j),\eta).$$

ただし, R^GはGのリーマン曲率テンソル,αは第2基本形式. $\Delta^{N(M)}$ で $N(M)$ 上の法接続のラフラプラシアンを表すとき, 第二変分公式は次で与えられる：

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{Vol}(M_t)\mid_{t=0}=\int_M h((-\Delta^{N(M)}+S-A)(V^N),V^N)dvol_M.$$

$\mathcal{J}=-\Delta^{N(M)}+S-A$ はJacobi 作用素と呼ばれる強楕円形微分作用素である.

Definition 5.
極小カルタン埋め込み$\Psi_\sigma : G/K \to G$が安定

$$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \Psi_\sigma \text{のすべての変分に対して}, \ \frac{d^2}{dt^2}\mathrm{Vol}(M_t)\ |_{t=0} \geq 0.$$

- σ の位数が 4 以上の場合には， Jacobi 微分作用素の形は複雑になる.

関連する研究

K. Mashimo (1992, 1995)　位数$2,3$ のカルタン埋め込みの安定性

N.Koike (2015)　可換な Hermann 作用の極小軌道のヤコビ作用素について

Y. Ohnita and M. Yoshida　可換な Hermann 作用の極小軌道のヤコビ作用素について

等長はめ込み $\varphi : G/K \to U/L$ について, O. Ikawa(1993) が Jacobi 微分作用素の表現を次のように与えた.
$\varphi \in C^\infty(G;\mathfrak{m}^\perp)_K \cong \Gamma(N(M))$ に対して,

$$J_1\varphi = \sum_{i=1}^{p}[d\rho(X_i), X_i\varphi]_{\mathfrak{m}^\perp} + \sum_{i=1}^{p}[d\rho(X_i), [d\rho(X_i), \varphi]_{\mathfrak{m}^\perp}]_{\mathfrak{m}^\perp}$$

とおく. ここで,$\mathfrak{m}^\perp$ は $\mathfrak{m}$ の直交補空間, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^\perp$ であり,
$\{X_i\}_{1\leq i\leq p}, \{X_i\}_{1\leq i\leq m}(m < p)$ は $\mathfrak{g}, \mathfrak{m}$ の正規直交基底を表す.

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\varphi) \ = \ & -\sum_{i=1}^{m} X_i^2\varphi - 2J_1\varphi + [\sum_{i=1}^{p}(\mathrm{ad}(d\rho X_i))^2\varphi]_{\mathfrak{m}^\perp} + J_2\varphi \\ & -\sum_{i=1}^{p}[d\rho(X_i), [(d\rho(X_i)_{\mathfrak{p}}, \varphi]_{dF(\mathfrak{m})}]_{\mathfrak{m}^\perp} \\ & +(1/2)\sum_{i=1}^{p}[(d\rho(X_i))_{\mathfrak{p}}, [(d\rho(X_i))_{\mathfrak{p}}, \varphi]_{dF(\mathfrak{m})}]_{\mathfrak{m}^\perp}.\end{aligned}$$

$\mathfrak{g}$ の複素化を $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ で表し, 1 の原始 k 乗根を ω で表す. σ に関する $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の固有空間分解を

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{m}_0^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{m}_1^{\mathbb{C}} \cdots \oplus \mathfrak{m}_{k-1}^{\mathbb{C}}$$

で表す. いま

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_{[\frac{k}{2}]},$$

ただし, $\mathfrak{m}_i = \left(\mathfrak{m}_i^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{m}_{k-i}^{\mathbb{C}}\right) \cap \mathfrak{g}$ とするとき,

各 $\mathfrak{m}_i$ $(1 \leq i \leq [k/2])$ 上で,

$$\Psi_\sigma^* h = \left(2 \sin \frac{\pi i}{k}\right)^2 \langle\ ,\ \rangle$$

が成り立つ.

$k=3$ のとき,

$$\mathcal{J}=-\frac{1}{3}I\otimes C_{\mathfrak{g}}+\frac{1}{3}\mathrm{ad}_{C_{\mathfrak{g}}}\otimes I$$

$k=4$ のとき,

$$\mathcal{J}=-\frac{1}{2}I\otimes C_{\mathfrak{m}_1}-\frac{1}{4}I\otimes C_{\mathfrak{m}_2}+\frac{1}{2}\mathrm{ad}_{C_{\mathfrak{m}_1}}\otimes I+\frac{1}{4}\mathrm{ad}_{C_{\mathfrak{m}_2}}\otimes I.$$

位数4 の内部自己同型から決まる極小カルタンはめ込みΨ_σの安定性は次の表で与えられる.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}$	stable
$\mathfrak{a}_{2n-1}$ $(n \geq 2)$	$\mathfrak{a}_{i-1} \oplus \mathfrak{a}_{n-i-1} \oplus \mathfrak{a}_{i-1} \oplus \mathfrak{a}_{i-1} \oplus \mathbb{R}^2$ $(1 \leq i \leq n-1)$	No
$\mathfrak{c}_n$ $(n \geq 3)$	$\mathfrak{c}_1 \oplus \mathfrak{a}_{n-2} \oplus \mathfrak{c}_1 \oplus \mathbb{R}$ $(1 \leq i < j < n-1, i+j=n)$	No
$\mathfrak{d}_n(n \geq 4)$	$\mathfrak{a}_{n-3} \oplus \mathbb{R}$	No
$\mathfrak{d}_n$ $(n \geq 4)$	$\mathfrak{d}_i \oplus \mathfrak{a}_{n-2i-1} \oplus \mathfrak{d}_i \oplus \mathbb{R}$ $(2 \leq i < j, i+j=n)$	No
$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_3 \oplus \mathfrak{a}_1 \oplus \mathbb{R}$	No
$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{d}_4 \oplus \mathbb{R}$	No
$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{a}_3 \oplus \mathfrak{a}_3 \oplus \mathfrak{a}_1$	Yes
$\mathfrak{e}_8$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_7$	Yes
$\mathfrak{e}_8$	$\mathfrak{d}_5 \oplus \mathfrak{a}_3$	Yes
$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{a}_3 \oplus \mathfrak{a}_1$	Yes

austere カルタンはめ込み Ψ_σ の安定性は次の表で与えられる.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}$	order	stable
$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_1$	4	No
$\mathfrak{a}_{2n}$ $(n \geq 2)$	$\mathfrak{c}_p \oplus \mathfrak{b}_{n-p}$ $(1 \leq p \leq n)$	4	Yes
$\mathfrak{a}_{2n-1}$ $(n \geq 3)$	$\mathfrak{c}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$	4	No
$\mathfrak{a}_{2n-1}$ $(n \geq 3)$	$\mathfrak{d}_p \oplus \mathfrak{c}_{n-p}$ $(2 \leq p \leq n-1)$	4	Yes
$\mathfrak{d}_{n+1}$ $(n \geq 2)$	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$	4	No
$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{b}_3$	4	No
$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{g}_2$	3	Yes
$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$	6	No

6 2重調和部分多様体

- 1983 J. Eells and L. Lemaire
  調和写像の一般化として k 重調和写像
- 2009 G.Y.Jiang
  2 重調和写像の第１変分, 第2変分公式
- 2015, 2019 S. Ohno, T. Sakai and H. Urakawa
  コンパクト対称空間への可換なHermann作用の2重調和等質超曲面
- 2016, 2017 J. Inoguchi and T. Sasahara
  コンパクト対称空間内の2重調和等質超曲面

リーマン多様体の等長はめ込み $\varphi:(M,g)\to(N,h)$ に対して

$$E_2(\varphi)=\frac{1}{2}\int_M |\tau(\varphi)|^2 v_g$$

で bienegy 関数を定義する. ここで, $\tau(\varphi)$ は φ の tension 場である. いま $\varphi_0=\varphi$ である任意の変分 φ_t に対して第1変分公式は,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E_2(\varphi_t)=-\int_M h(\tau_2(\varphi),V)v_g$$

で与えられる. ここで $V\in\Gamma(\varphi^{-1}TN)$, $\tau_2(\varphi)$ は φ の bitension 場を表す.

Definition 6. $\varphi:(M,g)\to(N,h)$ が $\tau_2(\varphi)=0$ をみたすとき, φ を**2重調和写像**という.

Remark 2. 2重調和写像の定義から, 調和写像は2重調和写像となる.

Remark 3. $\varphi:(M,g)\to(N,h)$ が調和写像であることと, M が N の極小部分多様体であることは同値である.

Definition 7. 調和写像でない 2 重調和写像を proper **な 2 重調和写像**という

Theorem 6 (S. Ohno, T. Sakai and H. Urakawa 2015)**.**
$\varphi:(M,g)\to(N,h)$ を等長はめ込みとする．また, すべての $X\in\mathfrak{X}(M)$ に対して, $\nabla^{\perp}_X\tau(\varphi)=0$ と仮定する．このとき, φ が 2 重調和写像であることは次と同値である．

$$\sum_{k=1}^{m} R^h(\tau(\varphi),d\varphi(e_k))d\varphi(e_k)=\sum_{j,k=1}^{m} h(\tau(\varphi),B_\varphi(e_j,e_k))B_\varphi(e_j,e_k)$$

ここで,$\{e_i\}_{i=1}^m$ は *local orthonomal frame field,* R^h は N のリーマン曲率テンソル, B_φ は φ の第二基本形式である．

Lemma 2. 位数 k の σ が引き起こすカルタン埋め込み $\Psi_\sigma : G/K \to G; gK \to g\sigma(g)^{-1}$ が 2 重調和写像であることは次と同値である.

$$\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{\alpha\in\Delta_j} h(\tau(\Psi_\sigma),\alpha)\alpha = \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{\alpha\in\Delta_j}\cot^2\left(\frac{j\pi}{k}\right)h(\tau(\Psi_\sigma),\alpha)\alpha$$

ここで, $\Delta_j = \{\alpha \in \Delta^+ \mid \alpha(H) = j/k\}$ である.

- 位数3 のとき

Theorem 7 (T. Kimura and K. Mashimo)**.**
位数3の内部自己同型 σ が引き起こすカルタン埋め込み Ψ_σ が *proper* な 2 重調和写像ならば極小である.

• 位数 4 のとき

$\mathfrak{a}_n (n \geq 1)$ について, 内部自己同型 $\sigma = \mathrm{Ad}(\exp 2\pi\sqrt{-1}H)$ が引き起こすカルタン埋め込み Ψ_σ について次が成り立つ.

$\mathfrak{g}$	H	$\mathfrak{k}$	biharmonic
$\mathfrak{a}_n$	$1/4v_i$ $(1 \leq i \leq n)$	$\mathfrak{a}_{i-1} \oplus \mathfrak{a}_{n-i} \oplus \mathbb{R}$	proper
$\mathfrak{a}_n$	$1/4(v_i + v_j)$ $(1 \leq i < j \leq n)$	$\mathfrak{a}_{i-1} \oplus \mathfrak{a}_{j-i-1} \oplus \mathfrak{a}_{n-j} \oplus \mathbb{R}^2$	No
$\mathfrak{a}_n$	$1/4(v_i + v_j + v_k)$ $(1 \leq i < j < k \leq n)$	$\mathfrak{a}_{i-1} \oplus \mathfrak{a}_{j-i-1} \oplus \mathfrak{a}_{k-j-1}$ $\oplus \mathfrak{a}_{n-k} \oplus \mathbb{R}^3$	minimal

Remark 4. H が最大ルート α_0 に対して, $\alpha_0(H) = 1/4$ をみたせば, 内部自己同型 $\sigma = \mathrm{Ad}(\exp 2\pi\sqrt{-1}H)$ が引き起こすカルタン埋め込み Ψ_σ は *proper* な 2 重調和写像となる.

今後の課題

- 安定性では G を単連結として表現を計算している
  単連結ではない場合の安定性について
- 外部自己同型の場合についての2重調和性の決定

References

[1] J. Eells and L. Lemaire, Selected Topics in Harmonic Maps, CBMS, Regional Conference Series in Math., vol. 50, Amer. Math. Soc., 1983.

[2] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, Academic Press, 1978.

[3] O.Ikawa, Equivariant minimal immersions of compact Riemannian homogeneous spaces into compact Riemannian homogeneous spaces, Tsukuba J. Math. 17 (1993), 169–188.

[4] O. Ikawa and H. Tasaki, Totally geodesic submanifold of maximal rank in symmetric spaces, Japan. J. Math., **26** no. 1 (2000), 1–29.

[5] J. Inoguchi and T. Sasahara, Biharmonic hypersurfaces in Riemannian symmetric spaces I, Hiroshima Math. J. 46 (2016), 97–121.

[6] J. Inoguchi and T. Sasahara, Biharmonic hypersurfaces in Riemannian symmetric spaces II, Hiroshima Math. J. 47 (2017), 349–378

[7] G. Y. Jiang, 2-Harmonic maps and their first and second variational formula, Chin. Ann. Math. 7A (1986) 388–402; Note Mat. 28 (2009) 209–232.

[8] J. A. Jimenez, Riemannian 4-symmetric spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 306(1988), 715–734.

[9] T. Kimura and K. Mashimo Classification of Cartan embeddings which are austere submanifolds, submitted.

[10] T. Kimura and K. Mashimo, Stability of certain Cartan embeddings, in preparation.

[11] K. Mashimo, Cartan embeddings of compact Riemannian 3-symmetric spaces, Tokyo J. of Math. 19(1996), 353–364.

[12] K. Mashimo, Cartan embeddings of compact Riemannian 4-symmetric spaces, preprint.

[13] S. Ohno, T. Sakai and H. Urakawa, Biharmoic homogeneous hypersurfaces in compact symmetric spaces, Differential Geom. Appl. 43(2015), 155–179.

[14] S. Ohno, T. Sakai and H. Urakawa, Biharmonic homogeneous submanifolds in compact symmetric spaces and compact Lie groups, Hiroshima Math. J. 49 (2019), 47–115.

[15] J. A. Wolf and A. Gray, Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms I, J. Diffe. Geom. 2 (1968), 77–114.

ご静聴ありがとうございました