

G_2 対称性を持つ等質空間とその幾何構造

中田 文憲

福島大学 人間発達文化学類

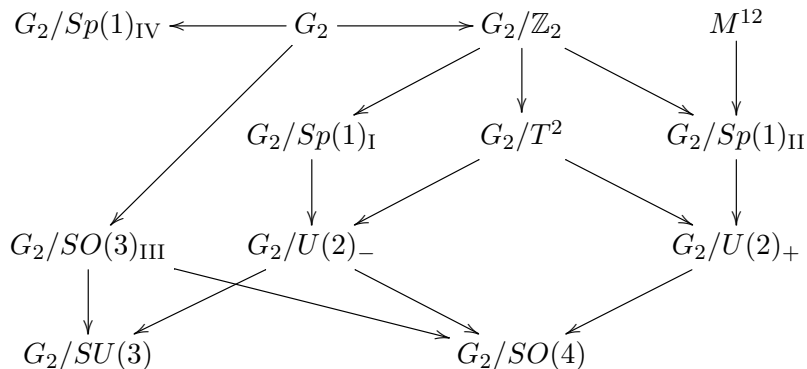
Joint with 橋本英哉 (名城大), 間下克哉 (法政大), 大橋美沙 (名工大)

2020 年 12 月 14 日 第 7 回 理科大幾何学セミナー

Introduction

G_2 : 例外型単純 Lie 群, 14 次元

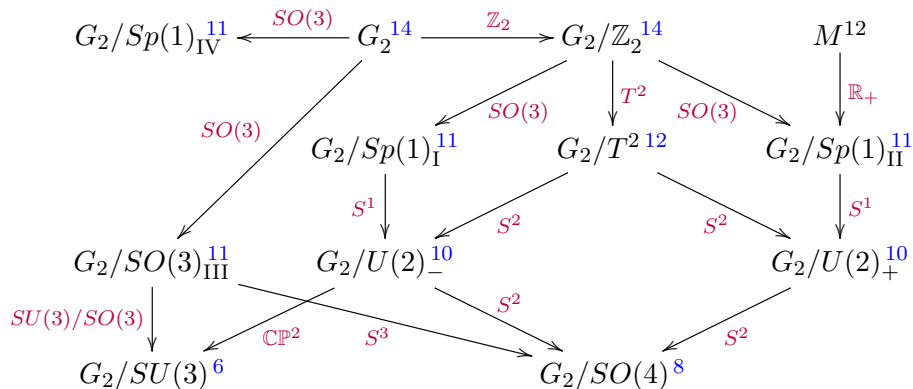
G_2 対称性を持つ主な等質空間と, 余等質性 1 の多様体 M^{12}



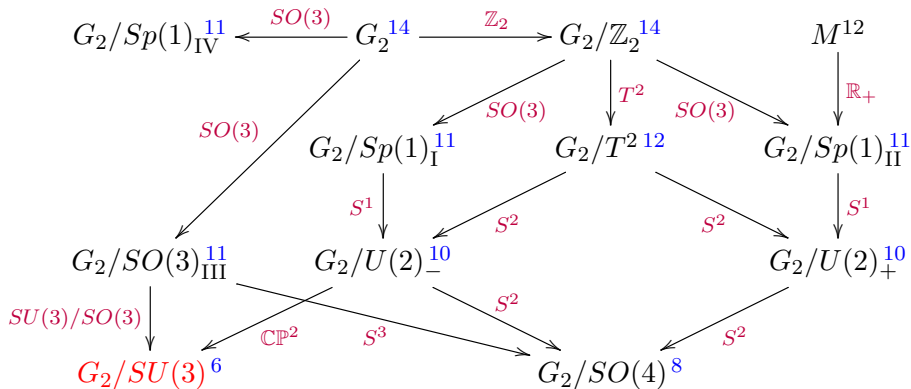
Introduction

G_2 : 例外型単純 Lie 群, 14 次元

G_2 対称性を持つ主な等質空間と, 余等質性 1 の多様体 M^{12}



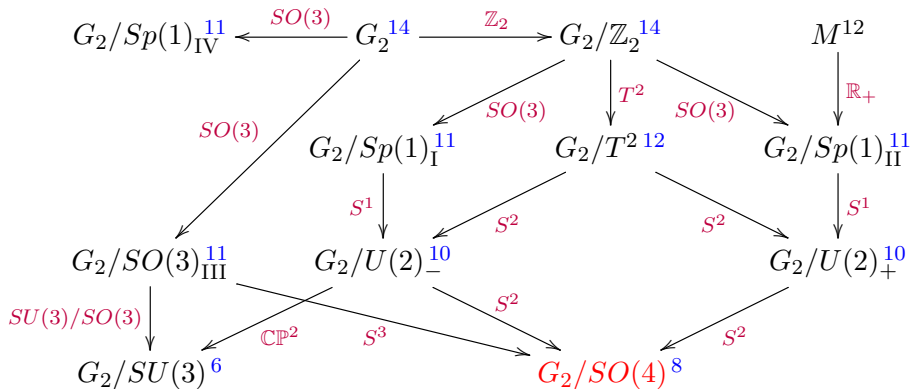
Introduction



$G_2/SU(3) \simeq S^6$ 6次元球面

可積分でない概複素構造, nearly Kähler 構造

Introduction

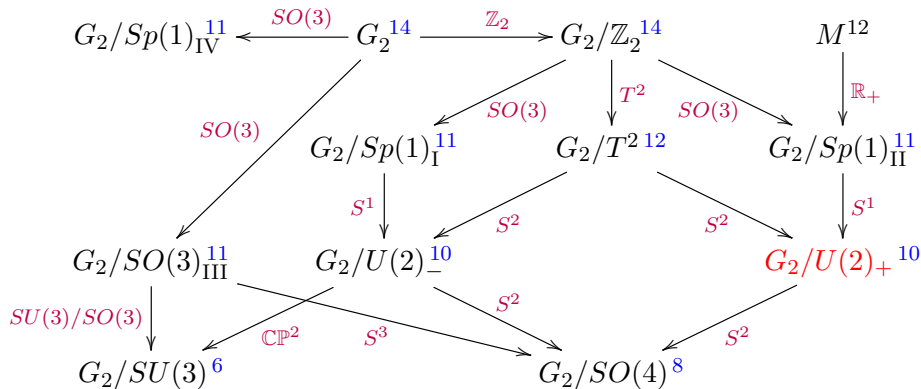


$$G_2/SO(4) \simeq Gr_{\text{ass}}^+(\text{Im } \mathbb{O})$$

結合的グラスマン多様体

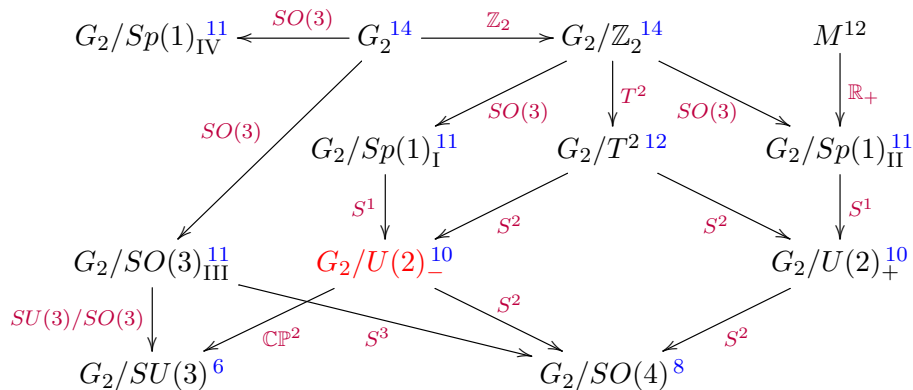
四元数 Kähler 構造, Riemann 対称空間

Introduction



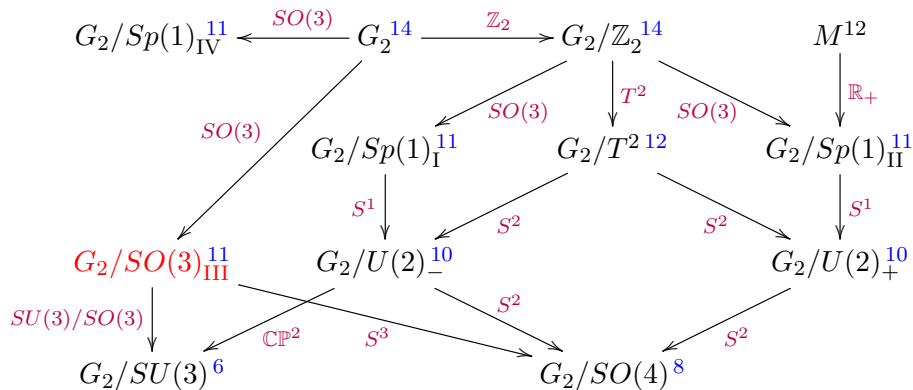
$G_2/U(2)_+$ 四元数 Kähler 多様体 $G_2/SO(4)$ のツイスター空間
複素多様体, 複素接触構造

Introduction



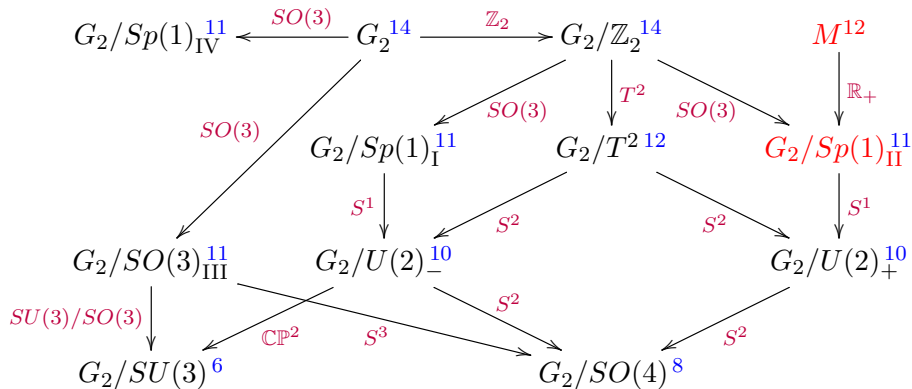
$G_2/U(2)_-$ ツイスター空間の類似物 (Penrose 型)
複素多様体

Introduction



$G_2/SO(3)_{\text{III}}$ ツイスター空間の類似物 (Penrose 型)
(cf. 塚田-榎吉)

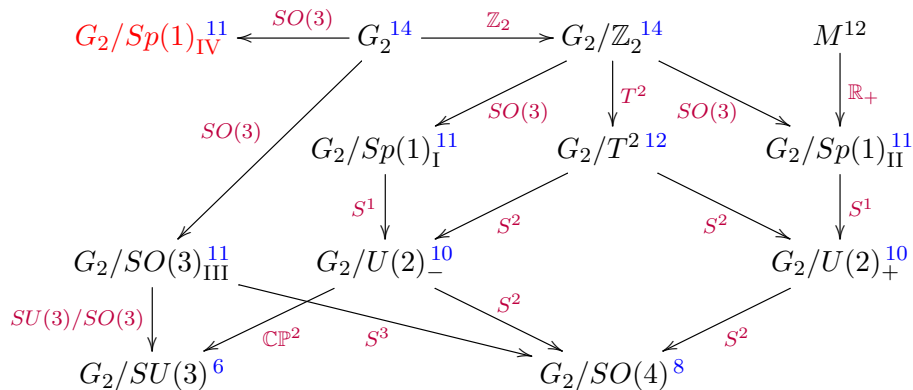
Introduction



$G_2/Sp(1)_{II}$ 3-佐々木多様体
 (小西東)

M^{12} 超 Kähler 多様体
 (非コンパクト)

Introduction



$G_2/Sp(1)_{IV}$ 謎 ???

Introduction

Motivation

G_2 対称性を持つ等質空間は様々な幾何構造をもち、互いに関係している。
→ それらを統一的に捉えて詳しい幾何学的性質を解明したい。

本日

これらの等質空間は、 $G_2/SO(4)$ 上の **tautological ベクトル束** を用いて統一的に表現できる。

八元数と G_2

四元数 (quaternion)

四元数

$$\mathbb{H} = \text{Span}_{\mathbb{R}} \langle 1, i, j, k \rangle \quad (\simeq \mathbb{R}^4)$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k$$

$$a + bi + cj + dk = (a + bi) + (c + di)j$$

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \quad \text{複素数 } \mathbb{C} \text{ に純虚数 } j \text{ を「追加」}$$

$$= \mathbb{R} \oplus \text{Im } \mathbb{H} \quad \text{実部／虚部の分解}$$

$$\text{内積} \quad \langle x, y \rangle = \text{Re}(x\bar{y}) \quad \mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4 \text{ の標準計量}$$

$$\text{外積} \quad x \times y = \frac{1}{2}(\bar{y}x - \bar{x}y) \quad \text{Im } \mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^3 \text{ 上の通常の外積}$$

\mathbb{H} は非可換・結合的なノルム代数.

四元数 (quaternion)

四元数 $\mathbb{H} = \text{Span}_{\mathbb{R}}\langle 1, i, j, k \rangle \quad (\simeq \mathbb{R}^4)$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k$$

$$a + bi + cj + dk = (a + bi) + (c + di)j$$

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \quad \text{複素数 } \mathbb{C} \text{ に純虚数 } j \text{ を「追加」}$$

$$= \mathbb{R} \oplus \text{Im } \mathbb{H} \quad \text{実部／虚部の分解}$$

内積 $\langle x, y \rangle = \text{Re}(x\bar{y}) \quad \mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4 \text{ の標準計量}$

外積 $x \times y = \frac{1}{2}(\bar{y}x - \bar{x}y) \quad \text{Im } \mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^3 \text{ 上の通常の外積}$

\mathbb{H} は非可換・結合的なノルム代数.

四元数 (quaternion)

四元数 \mathbb{H} の自己同型群

$$\begin{aligned}\text{Aut } \mathbb{H} &= \{g \in GL(\mathbb{H}) \mid g(xy) = g(x)g(y) \text{ for } \forall x, y \in \mathbb{H}\} \\ &= \{g \in GL(\text{Im } \mathbb{H}) \mid g(x \times y) = g(x) \times g(y) \text{ for } \forall x, y \in \mathbb{H}\} \\ &= SO(3)\end{aligned}$$

$Sp(1) = \{x \in \mathbb{H} \mid |x| = 1\} \simeq S^3$ は群になる.

八元数 (octonion, Cayley 代数)

八元数 $\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon = \text{Span}_{\mathbb{R}}\langle 1, i, j, k, \varepsilon, i\varepsilon, j\varepsilon, k\varepsilon \rangle \quad (\simeq \mathbb{R}^8)$

$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = (ac - \bar{d}b) + (da + b\bar{c})\varepsilon$$

$\mathbb{O} = \mathbb{R} \oplus \text{Im } \mathbb{O}$ 実部／虚部の分解

内積 $\langle x, y \rangle = \text{Re}(x\bar{y})$ $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$ の標準計量

外積 $x \times y = \frac{1}{2}(\bar{y}x - \bar{x}y)$ $\text{Im } \mathbb{O} \simeq \mathbb{R}^7$ 上の閉じた積

\mathbb{O} は非可換・非結合的なノルム代数. (一般に $(xy)z \neq x(yz)$) .

八元数 (octonion, Cayley 代数)

八元数 $\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon = \text{Span}_{\mathbb{R}}\langle 1, i, j, k, \varepsilon, i\varepsilon, j\varepsilon, k\varepsilon \rangle \quad (\simeq \mathbb{R}^8)$

$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = (ac - \bar{d}b) + (da + b\bar{c})\varepsilon$$

$\mathbb{O} = \mathbb{R} \oplus \text{Im } \mathbb{O}$ 実部／虚部の分解

内積 $\langle x, y \rangle = \text{Re}(x\bar{y})$ $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$ の標準計量

外積 $x \times y = \frac{1}{2}(\bar{y}x - \bar{x}y)$ $\text{Im } \mathbb{O} \simeq \mathbb{R}^7$ 上の閉じた積

\mathbb{O} は非可換・非結合的なノルム代数. (一般に $(xy)z \neq x(yz)$) .

八元数 (octonion, Cayley 代数)

八元数 \mathbb{O} の自己同型群

$$\begin{aligned} G_2 = \text{Aut } \mathbb{O} &= \{g \in GL(\mathbb{O}) \mid g(xy) = g(x)g(y) \text{ for } \forall x, y \in \mathbb{O}\} \\ &= \{g \in GL(\text{Im } \mathbb{O}) \mid g(x \times y) = g(x) \times g(y) \text{ for } \forall x, y \in \mathbb{O}\} \\ &\subset SO(7) \end{aligned}$$

$S^7 = \{x \in \mathbb{O} \mid |x| = 1\}$ は群にならない。 (結合法則が成り立たない)

結合的グラスマン多様体

$$Gr_{\text{ass}}^+(\text{Im } \mathbb{O})$$

結合的グラスマン多様体

結合的 3 平面, 余結合的 4 平面

- 3 平面 $V \subset \text{Im } \mathbb{O}$ が**結合的** (associative)
 - $\iff (xy)z = x(yz) \quad \text{for } \forall x, y, z \in V.$
 - $\iff \mathbb{R} \oplus V \subset \mathbb{O}$ が四元数部分空間.
- 4 平面 $W \subset \text{Im } \mathbb{O}$ が**余結合的** (coassociative)
 - $\iff W^\perp$ が結合的.

例

$\text{Im } \mathbb{O} = \text{Span}_{\mathbb{R}} \langle i, j, k, \varepsilon, i\varepsilon, j\varepsilon, k\varepsilon \rangle$ において

- $\text{Im } \mathbb{H} = \text{Span}_{\mathbb{R}} \langle i, j, k \rangle$ は結合的 3 平面.
- $\mathbb{H}\varepsilon = \text{Span}_{\mathbb{R}} \langle \varepsilon, i\varepsilon, j\varepsilon, k\varepsilon \rangle$ は余結合的 4 平面

結合的グラスマン多様体

結合的 3 平面全体の集合を $Gr_{\text{ass}}^+(\text{Im } \mathbb{O})$ で表し、結合的グラスマン多様体とよぶ.

$$Gr_{\text{ass}}^+(\text{Im } \mathbb{O}) = \{V \subset \text{Im } \mathbb{O} \mid V: \text{結合的 3 平面}\}$$

事実

- $Gr_{\text{ass}}^+(\text{Im } \mathbb{O})$ には G_2 が推移的に作用し、基点 $\text{Im } \mathbb{H} \in Gr_{\text{ass}}^+(\text{Im } \mathbb{O})$ における等方部分群は $SO(4)$ に同型: $Gr_{\text{ass}}^+(\text{Im } \mathbb{O}) = G_2/SO(4)$.
- $G_2/SO(4)$ は四元数 Kähler 構造を持つ 8 次元のリーマン対称空間になる.

結合的グラスマン多様体

結合的 3 平面全体の集合を $Gr_{\text{ass}}^+(\text{Im } \mathbb{O})$ で表し, **結合的グラスマン多様体**とよぶ.

$$Gr_{\text{ass}}^+(\text{Im } \mathbb{O}) = \{V \subset \text{Im } \mathbb{O} \mid V: \text{結合的 3 平面}\}$$

事実

- $Gr_{\text{ass}}^+(\text{Im } \mathbb{O})$ には G_2 が推移的に作用し, 基点 $\text{Im } \mathbb{H} \in Gr_{\text{ass}}^+(\text{Im } \mathbb{O})$ における等方部分群は $SO(4)$ に同型: $Gr_{\text{ass}}^+(\text{Im } \mathbb{O}) = G_2/SO(4)$.
- $G_2/SO(4)$ は**四元数 Kähler 構造**を持つ 8 次元のリーマン対称空間になる.

tautological ベクトル束

tautological ベクトル束

$Gr_{\text{ass}}^+(\text{Im } \mathbb{O})$ 上のベクトル束 \mathbb{V}, \mathbb{W} を次で定義する

$$\mathbb{V} = \{(V, u) \in Gr_{\text{ass}}^+(\text{Im } \mathbb{O}) \times \text{Im } \mathbb{O} \mid u \in V\}$$

$$\mathbb{W} = \{(V, u) \in Gr_{\text{ass}}^+(\text{Im } \mathbb{O}) \times \text{Im } \mathbb{O} \mid u \in V^\perp\}$$

このとき $\mathbb{V} \oplus \mathbb{W} = \underline{\text{Im } \mathbb{O}}$ (trivial bundle)

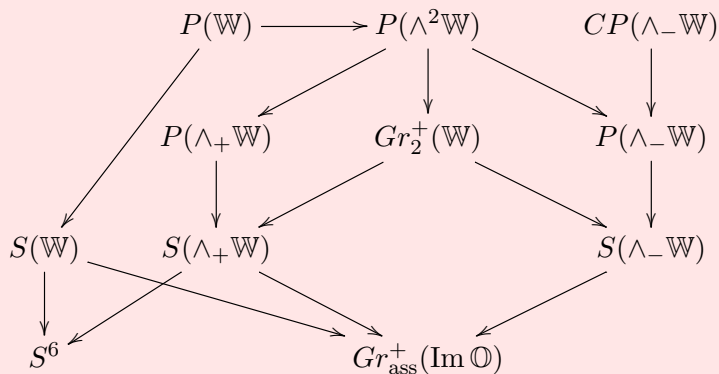
\mathbb{V} : tautological associative bundle (階数 3)

\mathbb{W} : tautological coassociative bundle (階数 4)

tautological ベクトル束

結論

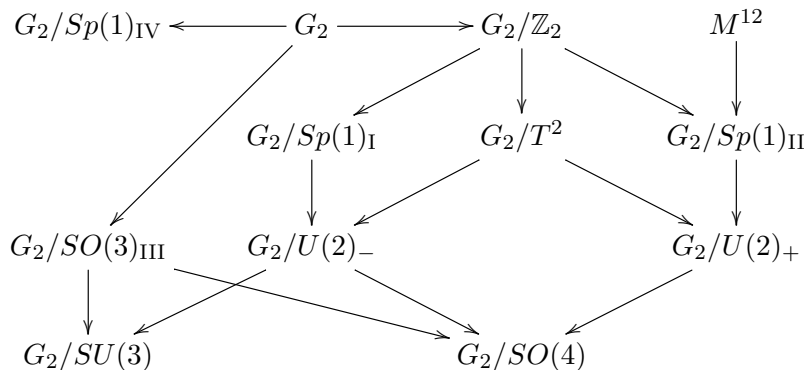
G_2 対称性を持つ各等質空間（および M^{12} ）は次のように書き換えられる



ここで P は主束（向きづけられた正規直交枠束）， S は球面束.

tautological ベクトル束

参考



G_2 -枠

$G_2 \simeq P(W)$ の説明

G_2 -枠

定義 (G_2 -枠)

$\text{Im } \mathbb{O}$ の基底 $(v_l, w_m) = (v_1, v_2, v_3, w_0, w_1, w_2, w_3)$ が G_2 -枠とは, ある $g \in G_2$ が存在して

$$(v_l, w_m) = (g(1), g(i), g(j), g(k), g(\varepsilon), g(i\varepsilon), g(j\varepsilon), g(k\varepsilon))$$

となること.

命題

$(v_1, v_2, v_3, w_0, w_1, w_2, w_3) \in (\text{Im } \mathbb{O})^7$ について

$$(v_1, v_2, v_3, w_0, w_1, w_2, w_3) \text{ が } G_2\text{-枠} \implies \begin{cases} v_1 = w_0 w_1 = w_2 w_3 \\ v_2 = w_0 w_2 = w_3 w_1 \\ v_3 = w_0 w_3 = w_1 w_2 \end{cases}$$

Proof.

$(i, j, k, \varepsilon, i\varepsilon, j\varepsilon, k\varepsilon)$ がこの関係式をみたし, G_2 作用で保たれるから. \square

G_2 -枠

命題

$(v_1, v_2, v_3, w_0, w_1, w_2, w_3) \in (\text{Im } \mathbb{O})^7$ について

$$(v_1, v_2, v_3, w_0, w_1, w_2, w_3) \text{ が } G_2\text{-枠} \implies \begin{cases} v_1 = w_0 w_1 = w_2 w_3 \\ v_2 = w_0 w_2 = w_3 w_1 \\ v_3 = w_0 w_3 = w_1 w_2 \end{cases}$$

Proof.

$(i, j, k, \varepsilon, i\varepsilon, j\varepsilon, k\varepsilon)$ がこの関係式をみたし, G_2 作用で保たれるから。 \square

G_2 -枠

命題

$V \oplus W = \text{Im } \mathbb{O}$ を associative/coassociative 分解とし, (w_0, w_1, w_2, w_3) を W の向きを保つ正規直交基底とする. このとき

$$w_0 w_1 = w_2 w_3, \quad w_0 w_2 = w_3 w_1, \quad w_0 w_3 = w_1 w_2$$

が成り立つ. さらに, これらを v_1, v_2, v_3 と定めると,
 $(v_1, v_2, v_3, w_0, w_1, w_2, w_3)$ は G_2 -枠.

Sketch.

部分群 $\{g \in G_2 \mid g \text{ は } V, W \text{ を保つ}\} \simeq SO(4)$ の作用を調べると,

$$\exists g \in G_2 \quad \text{s.t.} \quad (w_0, w_1, w_2, w_3) = (g(\varepsilon), g(i\varepsilon), g(j\varepsilon), g(k\varepsilon)).$$

この g について $(v_1, v_2, v_3) = (g(i), g(j), g(k))$ となる. □

G_2 -枠

命題

$V \oplus W = \text{Im } \mathbb{O}$ を associative/coassociative 分解とし, (w_0, w_1, w_2, w_3) を W の向きを保つ正規直交基底とする. このとき

$$w_0 w_1 = w_2 w_3, \quad w_0 w_2 = w_3 w_1, \quad w_0 w_3 = w_1 w_2$$

が成り立つ. さらに, これらを v_1, v_2, v_3 と定めると,
 $(v_1, v_2, v_3, w_0, w_1, w_2, w_3)$ は G_2 -枠.

Sketch.

部分群 $\{g \in G_2 \mid g \text{ は } V, W \text{ を保つ}\} \simeq SO(4)$ の作用を調べると,

$$\exists g \in G_2 \quad \text{s.t.} \quad (w_0, w_1, w_2, w_3) = (g(\varepsilon), g(i\varepsilon), g(j\varepsilon), g(k\varepsilon)).$$

この g について $(v_1, v_2, v_3) = (g(i), g(j), g(k))$ となる. □

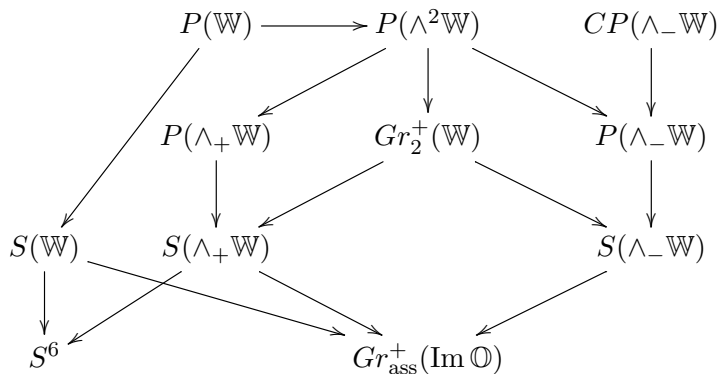
系

$Gr_{\text{ass}}^+(\text{Im } \mathbb{O})$ 上の $SO(4)$ 束として, 次の自然な同型がある

$$G_2 \simeq P(\mathbb{W})$$

G_2 -枠

その他の等質空間も, $P(\mathbb{W})$ の随伴束として, (基底 $\{w_0, w_1, w_2, w_3\}$ を用いて) 具体的に表示することができる.



まとめと展望

まとめ

G_2 対称性を持つほとんどの等質空間は, $Gr_{\text{ass}}^+(\text{Im } \mathbb{O})$ 上の **tautological coassociative bundle** \mathbb{W} を用いて統一的に表現できる.

展望

この統一的な表示を用いて, 様々な構造を詳しく調べたい

- 四元数 Kähler 構造などの具体的表示
- ツイスター対応 (部分多様体論・変形理論)
- M^{12} からの超 Kähler 商

(Appendix) 自己双対束

自己双対束

\mathbb{R}^4 束 \mathbb{W} は向きと計量を持つことから, fiberwise $*$ -作用素

$$* : \wedge^p \mathbb{W} \rightarrow \wedge^{4-p} \mathbb{W}$$

が定まる. 特に $p = 2$ のとき $*^2 = \text{id}$ となり, 次の固有分解が得られる

$$\wedge^2 \mathbb{W} = \wedge_+ \mathbb{W} \oplus \wedge_- \mathbb{W}, \quad \wedge_{\pm} \mathbb{W} = \{\varphi \in \wedge^2 \mathbb{W} \mid * \varphi = \pm \varphi\}.$$

自己双対束

命題

次の同型が成り立つ

$$\wedge_+ \mathbb{W} \simeq \mathbb{V}$$

Proof.

束写像 $\iota: \wedge^2 \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{V}$ が次で定まる

$$\iota(a \wedge b) = a \times b$$

このとき、 $\ker \iota = \wedge_- \mathbb{W}$ 、 $\iota(\wedge_+ \mathbb{W}) = \mathbb{V}$ となることが、次の具体的表示から従う

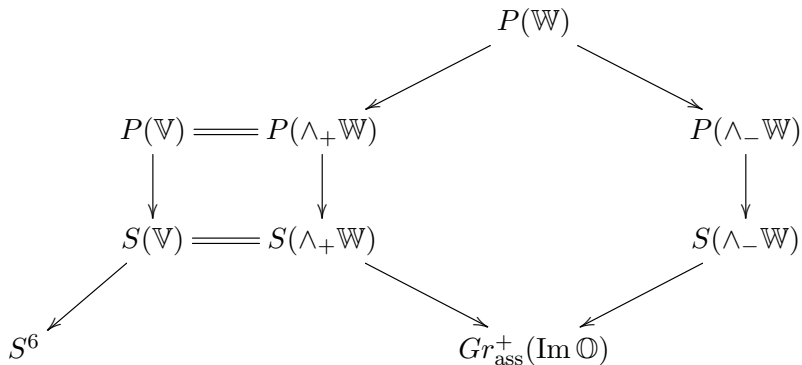
$$\wedge_+ \mathbb{W} = \langle w_0 \wedge w_1 + w_2 \wedge w_3, w_0 \wedge w_2 + w_3 \wedge w_1, w_0 \wedge w_3 + w_1 \wedge w_2 \rangle$$

$$\wedge_- \mathbb{W} = \langle w_0 \wedge w_1 - w_2 \wedge w_3, w_0 \wedge w_2 - w_3 \wedge w_1, w_0 \wedge w_3 - w_1 \wedge w_2 \rangle$$

□

自己双対束

次の図式が得られる



(Appendix) Stiefel-Whitney類について

Stiefel-Whitney 類について

事実 (Borel-Hirzebruch 1958)

$$H^*(G_2/SO(4), \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[u_2, u_3]/(u_2^3 + u_3^2, u_2^2 u_3)$$

各自数の \mathbb{Z}_2 -係数コホモロジー群は

H^0	H^1	H^2	H^3	H^4	H^5	H^6	H^7	H^8
\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}_2

また $w(G_2/SO(4)) = 1 + u_4 + u_6 + u_8$.

命題

次が成り立つ

- $w(\mathbb{V}) = 1 + u_2 + u_3$, $w(\mathbb{W}) = 1 + u_2 + u_3 + u_4$.
- $w(\mathbb{V}) = w(\wedge_+ \mathbb{W}) = w(\wedge_- \mathbb{W}) = 1 + u_2 + u_3$.
- $w(\wedge^2 \mathbb{W}) = 1 + u_4 + u_6$.