G_2 対称性を持つ等質空間とその幾何構造

中田　文憲

福島大学　人間発達文化学類

Joint with　橋本英哉 (名城大), 間下克哉 (法政大), 大橋美沙 (名工大)

2020 年 12 月 14 日　第 7 回 理科大幾何学セミナー

Introduction

G_2 : 例外型単純 Lie 群, 14 次元

G_2 対称性を持つ主な等質空間と, 余等質性 1 の多様体 M^{12}

$$
\begin{tikzcd}
G_2/Sp(1)_{\mathrm{IV}} & G_2 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[ddl] & G_2/\mathbb{Z}_2 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & M^{12} \arrow[d] \\
 & G_2/Sp(1)_{\mathrm{I}} \arrow[d] & G_2/T^2 \arrow[dl] \arrow[dr] & G_2/Sp(1)_{\mathrm{II}} \arrow[d] \\
G_2/SO(3)_{\mathrm{III}} \arrow[d] \arrow[drr] & G_2/U(2)_- \arrow[dl] \arrow[dr] & & G_2/U(2)_+ \arrow[dl] \\
G_2/SU(3) & & G_2/SO(4) &
\end{tikzcd}
$$

Introduction

G_2 : 例外型単純 Lie 群, 14 次元

G_2 対称性を持つ主な等質空間と, 余等質性 1 の多様体 M^{12}

$$
\begin{tikzcd}
G_2/Sp(1)_{\mathrm{IV}}^{11} & {G_2}^{14} \arrow[l, "SO(3)"'] \arrow[r, "\mathbb{Z}_2"] \arrow[ddl, "SO(3)"'] & G_2/{\mathbb{Z}_2}^{14} \arrow[dl, "SO(3)"] \arrow[d, "T^2"] \arrow[dr, "SO(3)"] & M^{12} \arrow[d, "\mathbb{R}_+"] \\
 & G_2/Sp(1)_{\mathrm{I}}^{11} \arrow[d, "S^1"'] & G_2/T^{2\ 12} \arrow[dl, "S^2"] \arrow[dr, "S^2"'] & G_2/Sp(1)_{\mathrm{II}}^{11} \arrow[d, "S^1"] \\
G_2/SO(3)_{\mathrm{III}}^{11} \arrow[d, "SU(3)/SO(3)"'] \arrow[drr, "S^3"] & G_2/U(2)_{-}^{10} \arrow[dl, "\mathbb{CP}^2"] \arrow[dr, "S^2"] & & G_2/U(2)_{+}^{10} \arrow[dl, "S^2"] \\
G_2/SU(3)^{6} & & G_2/SO(4)^{8} &
\end{tikzcd}
$$

Introduction

$$
\begin{tikzcd}
G_2/Sp(1)_{\mathrm{IV}}^{11} & G_2^{14} \arrow[l, "SO(3)"'] \arrow[rr, "\mathbb{Z}_2"] \arrow[ddl, "SO(3)"'] & & G_2/\mathbb{Z}_2^{14} \arrow[dl, "SO(3)"] \arrow[d, "T^2"] \arrow[dr, "SO(3)"'] & M^{12} \arrow[d, "\mathbb{R}_+"] \\
 & & G_2/Sp(1)_{\mathrm{I}}^{11} \arrow[d, "S^1"'] & G_2/T^{2\ 12} \arrow[dl, "S^2"] \arrow[dr, "S^2"'] & G_2/Sp(1)_{\mathrm{II}}^{11} \arrow[d, "S^1"] \\
 & G_2/SO(3)_{\mathrm{III}}^{11} \arrow[d, "SU(3)/SO(3)"'] \arrow[drr, "S^3"] & G_2/U(2)_{-}^{10} \arrow[dl, "\mathbb{CP}^2"] \arrow[dr, "S^2"] & & G_2/U(2)_{+}^{10} \arrow[dl, "S^2"] \\
 & G_2/SU(3)^{6} & & G_2/SO(4)^{8} &
\end{tikzcd}
$$

$G_2/SU(3) \simeq S^6$ 6 次元球面

可積分でない概複素構造, nearly Kähler 構造

Introduction

$$
\begin{tikzcd}
G_2/Sp(1)_{\mathrm{IV}}^{11} & G_2^{14} \arrow[l, "SO(3)"'] \arrow[r, "\mathbb{Z}_2"] \arrow[ddl, "SO(3)"'] & G_2/\mathbb{Z}_2^{14} \arrow[dl, "SO(3)"] \arrow[d, "T^2"] \arrow[dr, "SO(3)"'] & M^{12} \arrow[d, "\mathbb{R}_+"] \\
 & G_2/Sp(1)_{\mathrm{I}}^{11} \arrow[d, "S^1"'] & G_2/T^{2\ 12} \arrow[dl, "S^2"] \arrow[dr, "S^2"'] & G_2/Sp(1)_{\mathrm{II}}^{11} \arrow[d, "S^1"] \\
G_2/SO(3)_{\mathrm{III}}^{11} \arrow[d, "SU(3)/SO(3)"'] \arrow[drr, "S^3"] & G_2/U(2)_{-}^{10} \arrow[dl, "\mathbb{CP}^2"] \arrow[dr, "S^2"] & & G_2/U(2)_{+}^{10} \arrow[dl, "S^2"] \\
G_2/SU(3)^{6} & & G_2/SO(4)^{8} &
\end{tikzcd}
$$

$G_2/SO(4) \simeq Gr^+_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ 結合的グラスマン多様体

四元数 Kähler 構造, Riemann 対称空間

Introduction

$$
\begin{tikzcd}
G_2/Sp(1)_{\mathrm{IV}}^{\,11} & {G_2}^{14} \arrow[l, "SO(3)"'] \arrow[r, "\mathbb{Z}_2"] \arrow[ddl, "SO(3)"'] & G_2/{\mathbb{Z}_2}^{14} \arrow[dl, "SO(3)"] \arrow[d, "T^2"] \arrow[dr, "SO(3)"'] & M^{12} \arrow[d, "\mathbb{R}_+"] \\
 & G_2/Sp(1)_{\mathrm{I}}^{\,11} \arrow[d, "S^1"'] & G_2/T^2\,{}^{12} \arrow[dl, "S^2"] \arrow[dr, "S^2"'] & G_2/Sp(1)_{\mathrm{II}}^{\,11} \arrow[d, "S^1"] \\
G_2/SO(3)_{\mathrm{III}}^{\,11} \arrow[d, "SU(3)/SO(3)"'] \arrow[drr, "S^3"] & G_2/U(2)_{-}^{\,10} \arrow[dl, "\mathbb{CP}^2"] \arrow[dr, "S^2"] & & G_2/U(2)_{+}\,{}^{10} \arrow[dl, "S^2"] \\
G_2/SU(3)\,{}^{6} & & G_2/SO(4)\,{}^{8} &
\end{tikzcd}
$$

$G_2/U(2)_+$　四元数 Kähler 多様体 $G_2/SO(4)$ のツイスター空間
複素多様体, 複素接触構造

Introduction

$$
\begin{tikzcd}
G_2/Sp(1)_{\mathrm{IV}}^{11} & G_2{}^{14} \arrow[l, "SO(3)"'] \arrow[r, "\mathbb{Z}_2"] \arrow[ddl, "SO(3)"'] & G_2/\mathbb{Z}_2{}^{14} \arrow[dl, "SO(3)"] \arrow[d, "T^2"] \arrow[dr, "SO(3)"'] & M^{12} \arrow[d, "\mathbb{R}_+"] \\
& G_2/Sp(1)_{\mathrm{I}}^{11} \arrow[d, "S^1"'] & G_2/T^2{}^{12} \arrow[dl, "S^2"] \arrow[dr, "S^2"'] & G_2/Sp(1)_{\mathrm{II}}^{11} \arrow[d, "S^1"] \\
G_2/SO(3)_{\mathrm{III}}^{11} \arrow[d, "SU(3)/SO(3)"'] \arrow[drr, "S^3"'] & G_2/U(2)_-^{10} \arrow[dl, "\mathbb{CP}^2"] \arrow[dr, "S^2"] & & G_2/U(2)_+^{10} \arrow[dl, "S^2"] \\
G_2/SU(3)^{6} & & G_2/SO(4)^{8} &
\end{tikzcd}
$$

$G_2/U(2)_-$ ツイスター空間の類似物（Penrose 型）
複素多様体

Introduction

$$
\begin{tikzcd}
G_2/Sp(1)_{\mathrm{IV}}^{11} & G_2^{14} \arrow[l, "SO(3)"'] \arrow[r, "\mathbb{Z}_2"] \arrow[ddl, "SO(3)"'] & G_2/\mathbb{Z}_2^{14} \arrow[dl, "SO(3)"] \arrow[d, "T^2"] \arrow[dr, "SO(3)"] & M^{12} \arrow[d, "\mathbb{R}_+"] \\
 & G_2/Sp(1)_{\mathrm{I}}^{11} \arrow[d, "S^1"'] & G_2/T^{2\,12} \arrow[dl, "S^2"] \arrow[dr, "S^2"'] & G_2/Sp(1)_{\mathrm{II}}^{11} \arrow[d, "S^1"] \\
{\color{red} G_2/SO(3)_{\mathrm{III}}^{11}} \arrow[d, "SU(3)/SO(3)"'] \arrow[drr, "S^3"] & G_2/U(2)_{-}^{10} \arrow[dl, "\mathbb{CP}^2"] \arrow[dr, "S^2"] & & G_2/U(2)_{+}^{10} \arrow[dl, "S^2"] \\
G_2/SU(3)^{6} & & G_2/SO(4)^{8} &
\end{tikzcd}
$$

${\color{red} G_2/SO(3)_{\mathrm{III}}}$ ツイスター空間の類似物（Penrose 型）
(cf. 塚田-榎吉)

Introduction

$$
\begin{tikzcd}
G_2/Sp(1)_{\mathrm{IV}}^{11} & G_2^{14} \arrow[l, "SO(3)"'] \arrow[r, "\mathbb{Z}_2"] \arrow[ddl, "SO(3)"'] & G_2/\mathbb{Z}_2^{14} \arrow[dl, "SO(3)"] \arrow[d, "T^2"] \arrow[dr, "SO(3)"] & M^{12} \arrow[d, "\mathbb{R}_+"] \\
 & G_2/Sp(1)_{\mathrm{I}}^{11} \arrow[d, "S^1"'] & G_2/T^{2\,12} \arrow[dl, "S^2"] \arrow[dr, "S^2"'] & G_2/Sp(1)_{\mathrm{II}}^{11} \arrow[d, "S^1"] \\
G_2/SO(3)_{\mathrm{III}}^{11} \arrow[d, "SU(3)/SO(3)"'] \arrow[drr, "S^3"'] & G_2/U(2)_{-}^{10} \arrow[dl, "\mathbb{CP}^2"] \arrow[dr, "S^2"] & & G_2/U(2)_{+}^{10} \arrow[dl, "S^2"] \\
G_2/SU(3)^{6} & & G_2/SO(4)^{8} &
\end{tikzcd}
$$

$G_2/Sp(1)_{\mathrm{II}}$ 3-佐々木多様体（小西東）

M^{12} 超 Kähler 多様体（非コンパクト）

Introduction

$$
\begin{tikzcd}
G_2/Sp(1)_{\mathrm{IV}}^{11} & G_2{}^{14} \arrow[l, "SO(3)"'] \arrow[r, "\mathbb{Z}_2"] \arrow[ddl, "SO(3)"'] & G_2/\mathbb{Z}_2{}^{14} \arrow[dl, "SO(3)"] \arrow[d, "T^2"] \arrow[dr, "SO(3)"] & M^{12} \arrow[d, "\mathbb{R}_+"] \\
 & G_2/Sp(1)_{\mathrm{I}}^{11} \arrow[d, "S^1"'] & G_2/T^2\,{}^{12} \arrow[dl, "S^2"] \arrow[dr, "S^2"'] & G_2/Sp(1)_{\mathrm{II}}^{11} \arrow[d, "S^1"] \\
G_2/SO(3)_{\mathrm{III}}^{11} \arrow[d, "SU(3)/SO(3)"'] \arrow[drr, "S^3"'] & G_2/U(2)_{-}^{10} \arrow[dl, "\mathbb{CP}^2"] \arrow[dr, "S^2"] & & G_2/U(2)_{+}^{10} \arrow[dl, "S^2"] \\
G_2/SU(3)\,{}^{6} & & G_2/SO(4)\,{}^{8} &
\end{tikzcd}
$$

$G_2/T^2 \subset S^{13}$ G_2 の随伴作用の主軌道

主曲率 6 種の等径超曲面

Introduction

$$
\begin{tikzcd}
G_2/Sp(1)_{\mathrm{IV}}^{11} & G_2^{14} \arrow[l, "SO(3)"'] \arrow[r, "\mathbb{Z}_2"] \arrow[ddl, "SO(3)"'] & G_2/\mathbb{Z}_2^{14} \arrow[dl, "SO(3)"] \arrow[d, "T^2"] \arrow[dr, "SO(3)"] & M^{12} \arrow[d, "\mathbb{R}_+"] \\
 & G_2/Sp(1)_{\mathrm{I}}^{11} \arrow[d, "S^1"'] & G_2/T^{2\ 12} \arrow[dl, "S^2"] \arrow[dr, "S^2"'] & G_2/Sp(1)_{\mathrm{II}}^{11} \arrow[d, "S^1"] \\
G_2/SO(3)_{\mathrm{III}}^{11} \arrow[d, "SU(3)/SO(3)"'] \arrow[drr, "S^3"] & G_2/U(2)_{-}^{10} \arrow[dl, "\mathbb{CP}^2"] \arrow[dr, "S^2"] & & G_2/U(2)_{+}^{10} \arrow[dl, "S^2"] \\
G_2/SU(3)^{6} & & G_2/SO(4)^{8} &
\end{tikzcd}
$$

$G_2/Sp(1)_{\mathrm{IV}}$ 謎 ???

Introduction

Motivation

G_2 対称性を持つ等質空間は様々な幾何構造をもち, 互いに関係している.
$\to$ それらを統一的に捉えて詳しい幾何学的性質を解明したい.

本日

これらの等質空間は, $G_2/SO(4)$ 上の tautological ベクトル束を用いて統一的に表現できる.

八元数と G_2

四元数 (quaternion)

四元数 $\mathbb{H} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\langle 1, i, j, k\rangle \quad (\simeq \mathbb{R}^4)$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k$$

$$a + bi + cj + dk = (a + bi) + (c + di)j$$

$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j$ 　　複素数 $\mathbb{C}$ に純虚数 j を「追加」

$= \mathbb{R} \oplus \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ 　　実部／虚部の分解

内積 $\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}(x\bar{y})$ 　　$\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$ の標準計量

外積 $x \times y = \frac{1}{2}(\bar{y}x - \bar{x}y)$ 　　$\mathrm{Im}\,\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^3$ 上の通常の外積

$\mathbb{H}$ は非可換・結合的なノルム代数.

四元数 (quaternion)

四元数 $\mathbb{H} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\langle 1, i, j, k\rangle \quad (\simeq \mathbb{R}^4)$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k$$

$$a + bi + cj + dk = (a + bi) + (c + di)j$$

$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j$ 　複素数 $\mathbb{C}$ に純虚数 j を「追加」

$= \mathbb{R} \oplus \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ 　実部／虚部の分解

内積 $\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}(x\bar{y})$ 　$\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$ の標準計量

外積 $x \times y = \frac{1}{2}(\bar{y}x - \bar{x}y)$ 　$\mathrm{Im}\,\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^3$ 上の通常の外積

$\mathbb{H}$ は非可換・結合的なノルム代数.

四元数 (quaternion)

四元数 $\mathbb{H}$ の自己同型群

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}\,\mathbb{H} &= \{g \in GL(\mathbb{H}) \mid g(xy) = g(x)g(y) \quad \text{for} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{H}\} \\ &= \{g \in GL(\mathrm{Im}\,\mathbb{H}) \mid g(x \times y) = g(x) \times g(y) \quad \text{for} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{H}\} \\ &= SO(3)\end{aligned}$$

$Sp(1) = \{x \in \mathbb{H} \mid \ |x| = 1\} \simeq S^3$ は群になる.

八元数 (octonion, Cayley 代数)

八元数 $\quad \mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\langle 1, i, j, k, \varepsilon, i\varepsilon, j\varepsilon, k\varepsilon \rangle \quad (\simeq \mathbb{R}^8)$

$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = (ac - \bar{d}b) + (da + b\bar{c})\varepsilon$$

$\mathbb{O} = \mathbb{R} \oplus \mathrm{Im}\,\mathbb{O}$ 　実部／虚部の分解

内積 $\quad \langle x, y \rangle = \mathrm{Re}(x\bar{y})$ 　$\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^8$ の標準計量

外積 $\quad x \times y = \frac{1}{2}(\bar{y}x - \bar{x}y)$ 　$\mathrm{Im}\,\mathbb{O} \simeq \mathbb{R}^7$ 上の閉じた積

$\mathbb{O}$ は非可換・非結合的なノルム代数．（一般に $(xy)z \neq x(yz)$）．

八元数 (octonion, Cayley 代数)

八元数 $$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\langle 1, i, j, k, \varepsilon, i\varepsilon, j\varepsilon, k\varepsilon \rangle \quad (\simeq \mathbb{R}^8)$$
$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = (ac - \bar{d}b) + (da + b\bar{c})\varepsilon$$

$$\mathbb{O} = \mathbb{R} \oplus \mathrm{Im}\,\mathbb{O}$$ 実部／虚部の分解

内積 $\langle x, y \rangle = \mathrm{Re}(x\bar{y})$ $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^8$ の標準計量

外積 $x \times y = \frac{1}{2}(\bar{y}x - \bar{x}y)$ $\mathrm{Im}\,\mathbb{O} \simeq \mathbb{R}^7$ 上の閉じた積

$\mathbb{O}$ は非可換・非結合的なノルム代数. （一般に $(xy)z \neq x(yz)$）.

八元数 (octonion, Cayley 代数)

八元数 $\mathbb{O}$ の自己同型群

$$
\begin{aligned}
G_2 = \operatorname{Aut}\mathbb{O} &= \{g \in GL(\mathbb{O}) \mid g(xy) = g(x)g(y) \quad \text{for} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{O}\} \\
&= \{g \in GL(\operatorname{Im}\mathbb{O}) \mid g(x \times y) = g(x) \times g(y) \ \text{for} \ \ \forall\, x, y \in \mathbb{O}\} \\
&\subset SO(7)
\end{aligned}
$$

$S^7 = \{x \in \mathbb{O} \mid \ |x| = 1\}$ は群にならない．（結合法則が成り立たない）

結合的グラスマン多様体

$Gr^{+}_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$

結合的グラスマン多様体

結合的 3 平面, 余結合的 4 平面

- 3 平面 $V \subset \operatorname{Im}\mathbb{O}$ が結合的 (associative)

$$\iff \quad (xy)z = x(yz) \quad \text{for} \quad \forall\, x, y, z \in V.$$

$$\iff \quad \mathbb{R} \oplus V \subset \mathbb{O} \text{ が四元数部分空間.}$$

- 4 平面 $W \subset \operatorname{Im}\mathbb{O}$ が余結合的 (coassociative)

$$\iff \quad W^{\perp} \text{ が結合的.}$$

例

$\operatorname{Im}\mathbb{O} = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\langle i, j, k, \varepsilon, i\varepsilon, j\varepsilon, k\varepsilon\rangle$ において

- $\operatorname{Im}\mathbb{H} = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\langle i, j, k\rangle$ は結合的 3 平面.
- $\mathbb{H}\varepsilon = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\langle \varepsilon, i\varepsilon, j\varepsilon, k\varepsilon\rangle$ は余結合的 4 平面

結合的グラスマン多様体

結合的 3 平面全体の集合を $Gr^{+}_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ で表し, 結合的グラスマン多様体とよぶ.

$$Gr^{+}_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) = \{V \subset \mathrm{Im}\,\mathbb{O} \mid \ V\text{: 結合的 3 平面}\,\}$$

事実

- $Gr^{+}_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ には G_2 が推移的に作用し, 基点 $\mathrm{Im}\,\mathbb{H} \in Gr^{+}_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ における等方部分群は $SO(4)$ に同型： $Gr^{+}_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) = G_2/SO(4)$.
- $G_2/SO(4)$ は四元数 Kähler 構造を持つ 8 次元のリーマン対称空間になる.

結合的グラスマン多様体

結合的 3 平面全体の集合を $Gr^{+}_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ で表し, 結合的グラスマン多様体とよぶ.

$$Gr^{+}_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) = \{V \subset \mathrm{Im}\,\mathbb{O} \mid \ V\text{: 結合的 3 平面}\}$$

事実

- $Gr^{+}_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ には G_2 が推移的に作用し, 基点 $\mathrm{Im}\,\mathbb{H} \in Gr^{+}_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ における等方部分群は $SO(4)$ に同型： $Gr^{+}_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) = G_2/SO(4)$.
- $G_2/SO(4)$ は四元数 Kähler 構造を持つ 8 次元のリーマン対称空間になる.

tautological ベクトル束

tautological ベクトル束

$Gr^+_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ 上のベクトル束 $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ を次で定義する

$$\mathbb{V} = \{(V, u) \in Gr^+_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) \times \mathrm{Im}\,\mathbb{O} \mid u \in V\}$$
$$\mathbb{W} = \{(V, u) \in Gr^+_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) \times \mathrm{Im}\,\mathbb{O} \mid u \in V^\perp\}$$

このとき $\mathbb{V} \oplus \mathbb{W} = \underline{\mathrm{Im}\,\mathbb{O}}$ (trivial bundle)

$\mathbb{V}$: tautological associative bundle （階数 3)
$\mathbb{W}$: tautological coassociative bundle （階数 4)

tautological ベクトル束

結論

G_2 対称性を持つ各等質空間（および M^{12}）は次のように書き換えられる

$$
\begin{tikzcd}
 & P(\mathbb{W}) \arrow[r] \arrow[ddl] & P(\wedge^2\mathbb{W}) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & CP(\wedge_-\mathbb{W}) \arrow[d] \\
 & P(\wedge_+\mathbb{W}) \arrow[d] & Gr_2^+(\mathbb{W}) \arrow[dl] \arrow[dr] & P(\wedge_-\mathbb{W}) \arrow[d] \\
S(\mathbb{W}) \arrow[d] \arrow[drr] & S(\wedge_+\mathbb{W}) \arrow[dl] \arrow[dr] & & S(\wedge_-\mathbb{W}) \arrow[dl] \\
S^6 & & Gr_{\mathrm{ass}}^+(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) &
\end{tikzcd}
$$

ここで P は主束（向きづけられた正規直交枠束），S は球面束.

tautological ベクトル束

参考

$$
\begin{tikzcd}
G_2/Sp(1)_{\mathrm{IV}} & G_2 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[ddl] & G_2/\mathbb{Z}_2 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & M^{12} \arrow[d] \\
 & G_2/Sp(1)_{\mathrm{I}} \arrow[d] & G_2/T^2 \arrow[dl] \arrow[dr] & G_2/Sp(1)_{\mathrm{II}} \arrow[d] \\
G_2/SO(3)_{\mathrm{III}} \arrow[d] \arrow[drr] & G_2/U(2)_- \arrow[dl] \arrow[dr] & & G_2/U(2)_+ \arrow[dl] \\
G_2/SU(3) & & G_2/SO(4) &
\end{tikzcd}
$$

G_2-枠

$G_2 \simeq P(\mathbb{W})$ の説明

G_2-枠

定義（G_2-枠）

$\mathrm{Im}\,\mathbb{O}$ の基底 $(v_l, w_m) = (v_1, v_2, v_3, w_0, w_1, w_2, w_3)$ が G_2-枠とは，ある $g \in G_2$ が存在して

$$(v_l, w_m) = (g(1), g(i), g(j), g(k), g(\varepsilon), g(i\varepsilon), g(j\varepsilon), g(k\varepsilon))$$

となること．

G_2-枠

命題

$(v_1, v_2, v_3, w_0, w_1, w_2, w_3) \in (\mathrm{Im}\,\mathbb{O})^7$ について

$$(v_1, v_2, v_3, w_0, w_1, w_2, w_3) \text{ が } G_2\text{-枠} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} v_1 = w_0 w_1 = w_2 w_3 \\ v_2 = w_0 w_2 = w_3 w_1 \\ v_3 = w_0 w_3 = w_1 w_2 \end{cases}$$

Proof.

$(i, j, k, \varepsilon, i\varepsilon, j\varepsilon, k\varepsilon)$ がこの関係式をみたし, G_2 作用で保たれるから. □

G_2-枠

命題

$(v_1, v_2, v_3, w_0, w_1, w_2, w_3) \in (\mathrm{Im}\,\mathbb{O})^7$ について

$$(v_1, v_2, v_3, w_0, w_1, w_2, w_3) \text{ が } G_2\text{-枠} \implies \begin{cases} v_1 = w_0 w_1 = w_2 w_3 \\ v_2 = w_0 w_2 = w_3 w_1 \\ v_3 = w_0 w_3 = w_1 w_2 \end{cases}$$

Proof.

$(i, j, k, \varepsilon, i\varepsilon, j\varepsilon, k\varepsilon)$ がこの関係式をみたし, G_2 作用で保たれるから. $\square$

G_2-枠

命題

$V \oplus W = \mathrm{Im}\,\mathbb{O}$ を associative/coassociative 分解とし，(w_0, w_1, w_2, w_3) を W の向きを保つ正規直交基底とする．このとき

$$w_0 w_1 = w_2 w_3, \quad w_0 w_2 = w_3 w_1, \quad w_0 w_3 = w_1 w_2$$

が成り立つ．さらに，これらを v_1, v_2, v_3 と定めると，
$(v_1, v_2, v_3, w_0, w_1, w_2, w_3)$ は G_2-枠．

Sketch.

部分群 $\{g \in G_2 \mid g$ は V, W を保つ$\} \simeq SO(4)$ の作用を調べると，

$$\exists\, g \in G_2 \quad \text{s.t.} \quad (w_0, w_1, w_2, w_3) = (g(\varepsilon), g(i\varepsilon), g(j\varepsilon), g(k\varepsilon)).$$

この g について $(v_1, v_2, v_3) = (g(i), g(j), g(k))$ となる．$\square$

G_2-枠

命題

$V \oplus W = \mathrm{Im}\,\mathbb{O}$ を associative/coassociative 分解とし，(w_0, w_1, w_2, w_3) を W の向きを保つ正規直交基底とする．このとき

$$w_0 w_1 = w_2 w_3, \quad w_0 w_2 = w_3 w_1, \quad w_0 w_3 = w_1 w_2$$

が成り立つ．さらに，これらを v_1, v_2, v_3 と定めると，$(v_1, v_2, v_3, w_0, w_1, w_2, w_3)$ は G_2-枠．

Sketch.

部分群 $\{g \in G_2 \mid g$ は V, W を保つ $\} \simeq SO(4)$ の作用を調べると，

$$\exists\, g \in G_2 \quad \text{s.t.} \quad (w_0, w_1, w_2, w_3) = (g(\varepsilon), g(i\varepsilon), g(j\varepsilon), g(k\varepsilon)).$$

この g について $(v_1, v_2, v_3) = (g(i), g(j), g(k))$ となる． □

G_2-枠

系

$Gr^+_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ 上の $SO(4)$ 束として, 次の自然な同型がある

$$G_2 \simeq P(\mathbb{W})$$

G_2-枠

その他の等質空間も, $P(\mathbb{W})$ の随伴束として, (基底 $\{w_0, w_1, w_2, w_3\}$ を用いて) 具体的に表示することができる.

$$
\begin{tikzcd}
 & P(\mathbb{W}) \arrow[r] \arrow[ddl] & P(\wedge^2\mathbb{W}) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & CP(\wedge_-\mathbb{W}) \arrow[d] \\
 & P(\wedge_+\mathbb{W}) \arrow[d] & Gr_2^+(\mathbb{W}) \arrow[dl] \arrow[dr] & P(\wedge_-\mathbb{W}) \arrow[d] \\
S(\mathbb{W}) \arrow[d] \arrow[drr] & S(\wedge_+\mathbb{W}) \arrow[dl] \arrow[dr] & & S(\wedge_-\mathbb{W}) \arrow[dl] \\
S^6 & & Gr_{\mathrm{ass}}^+(\operatorname{Im}\mathbb{O}) &
\end{tikzcd}
$$

まとめと展望

まとめ

G_2 対称性を持つほとんどの等質空間は, $Gr^+_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ 上の tautological coassociative bundle $\mathbb{W}$ を用いて統一的に表現できる.

展望

この統一的な表示を用いて, 様々な構造を詳しく調べたい

- 四元数 Kähler 構造などの具体的表示
- ツイスター対応（部分多様体論・変形理論）
- M^{12} からの超 Kähler 商

(Appendix) 自己双対束

自己双対束

$\mathbb{R}^4$ 束 $\mathbb{W}$ は向きと計量を持つことから, fiberwize $*$-作用素

$$*: \wedge^p \mathbb{W} \to \wedge^{4-p} \mathbb{W}$$

が定まる. 特に $p = 2$ のとき $*^2 = \mathrm{id}$ となり, 次の固有分解が得られる

$$\wedge^2 \mathbb{W} = \wedge_+ \mathbb{W} \oplus \wedge_- \mathbb{W}, \qquad \wedge_\pm \mathbb{W} = \{\varphi \in \wedge^2 \mathbb{W} \mid *\varphi = \pm\varphi\}.$$

自己双対束

命題

次の同型が成り立つ

$$\wedge_+ \mathbb{W} \simeq \mathbb{V}$$

Proof.

束写像 $\iota \wedge^2 \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ が次で定まる

$$\iota(a \wedge b) = a \times b$$

このとき, $\ker \iota = \wedge_- \mathbb{W}, \iota(\wedge_+ \mathbb{W}) = \mathbb{V}$ となることが, 次の具体的表示から従う

$$\wedge_+ \mathbb{W} = \langle w_0 \wedge w_1 + w_2 \wedge w_3,\ w_0 \wedge w_2 + w_3 \wedge w_1,\ w_0 \wedge w_3 + w_1 \wedge w_2 \rangle$$
$$\wedge_- \mathbb{W} = \langle w_0 \wedge w_1 - w_2 \wedge w_3,\ w_0 \wedge w_2 - w_3 \wedge w_1,\ w_0 \wedge w_3 - w_1 \wedge w_2 \rangle$$

□

自己双対束

次の図式が得られる

$$
\begin{tikzcd}
 & & & P(\mathbb{W}) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & P(\mathbb{V}) \arrow[r, equal] \arrow[d] & P(\wedge_+ \mathbb{W}) \arrow[d] & & P(\wedge_- \mathbb{W}) \arrow[d] \\
 & S(\mathbb{V}) \arrow[r, equal] \arrow[dl] & S(\wedge_+ \mathbb{W}) \arrow[dr] & & S(\wedge_- \mathbb{W}) \arrow[dl] \\
S^6 & & & Gr^+_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\, \mathbb{O}) &
\end{tikzcd}
$$

(Appendix) Stiefel-Whitney 類について

Stiefel-Whitney 類について

事実 (Borel-Hirzeburch 1958)

$$H^*(G_2/SO(4), \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[u_2, u_3]/(u_2^3 + u_3^2, u_2^2 u_3)$$

各自数の $\mathbb{Z}_2$-係数コホモロジー群は

H^0	H^1	H^2	H^3	H^4	H^5	H^6	H^7	H^8
$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$

また $w(G_2/SO(4)) = 1 + u_4 + u_6 + u_8$.

命題

次が成り立つ

- $w(\mathbb{V}) = 1 + u_2 + u_3$, $w(\mathbb{W}) = 1 + u_2 + u_3 + u_4$.
- $w(\mathbb{V}) = w(\wedge_+ \mathbb{W}) = w(\wedge_- \mathbb{W}) = 1 + u_2 + u_3$.
- $w(\wedge^2 \mathbb{W}) = 1 + u_4 + u_6$.