

クライン群のヨルゲンセン数

静岡大学理学部 佐藤 宏樹

November 21, 2007, 東京理科大学

0. アブストラクト

クライン群論における重要な問題の1つは、モービウス群の部分群 G が離散群であるか否かを判定することである。この問題に関し重要で有用な2つの定理がある。1つはポアンカレの多面体定理であり、これは G が離散群であるための十分条件を与えている。もうひとつはヨルゲンセン不等式定理である。これは2元生成群が離散群であるための必要条件を与えている。

1976年ヨルゲンセンはヨルゲンセン不等式定理と呼ばれている次の重要な定理を証明した。

定理 A (Jørgensen [2]) モービウス変換 A と B は非初等的離散群を生成するとする。このとき、次の不等式 (ヨルゲンセンの不等式という) が成り立つ:

$$J(A, B) := |\mathrm{tr}^2(A) - 4| + |\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2| \geq 1 \quad (*)$$

下界 1 は最良である。

この講演ではヨルゲンセンの不等式について最近得られた結果およびこの10年余にわたり得られた結果を紹介する (Goto-Li-Sato [1], Jørgensen [2], T.Jørgensen-M.Kiikka [3], T.Jørgensen-A.Lascurain-T.Pignataro [4], Li-Oichi-Sato [5], Oichi-Sato [6], Sato [7, 8, 9, 10])。

1. 定義と問題

1.1. 定義

定義 1.1. A と B をモービウス変換とする。

$$J(A, B) := |\mathrm{tr}^2(A) - 4| + |\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2|$$

を ordered pair (A, B) のヨルゲンセン数 という。

定義 1.2. G をモービウス変換群の非初等的2元生成部分群とする。

$$J(G) := \inf\{J(A, B) \mid G = \langle A, B \rangle\}$$

を G のヨルゲンセン数という。

定義 1.3. モービウス変換群の部分群 G が次の4つの条件を満たすとき、 G をヨルゲンセン群という: (1) G は2元生成群である。(2) G は離散群である。(3) G は非初等的群である。(4) $J(A, B) = 1$ となる G の生成元 A と B が存在する。特に、 A が放物型 (楕円型) 変換のとき、 G を放物型 (楕円型) ヨルゲンセン群という。

定義 1.4. R_2 を種数 2 のシュottキイ空間、古典的シュottキイ空間、または実型シュottキイ空間とする。このとき、

$$J(R_2) := \inf\{J(G) \mid G \in R_2\}$$

を空間 R_2 のヨルゲンセン数という。

1.2. 問題

問題 1. すべてのヨルゲンセン群を見つけよ。

問題 2. r を $r \geq 1$ なる実数とする。このとき、どのような r に対しヨルゲンセン数が r となる非初等的離散群 (クライン群) が存在するか。

問題 3. ショットキイ空間、古典的ショットキイ空間、および実型ショットキイ空間のヨルゲンセン数を求めよ。

参考文献

- [1] H. Goto, C. Li and H. Sato, *Jørgensen numbers of triangle groups*, in preparation.
- [2] T. Jørgensen, *On discrete groups of Möbius transformations*, Amer. J. Math. **98** (1976), 739-749.
- [3] T. Jørgensen and M. Kiikka, *Some extreme discrete groups*, Ann. Acad. Sci. Fenn. **1** (1975), 245-248.
- [4] T. Jørgensen, A. Lascurain and T. Pignataro, *Translation extensions of the classical modular group*, Complex Variables **19** (1992), 205-209.
- [5] C. Li, M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen groups of parabolic type I (Finite type)*, Comput. Methods Funct. Theory **5** (2005), 409 - 430; *Jørgensen groups of parabolic type II (Countably infinite case)*, Osaka J. Math. **41** (2004), 491 - 506; *Jørgensen groups of parabolic type III (Uncountably infinite case)*, Kodai Math. J. **28** (2005), 248 - 264.
- [6] M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen numbers of discrete groups*, RIMS Kokyuroku, Kyoto Univ. 1518, (2006), 105 - 118.
- [7] H. Sato, *Classical Schottky groups of real type of genus two, I*, Tôhoku Math. J., **40** (1988), 51-75; *Classical Schottky groups of real type of genus two, II*, Tôhoku Math. J., **43** (1991), 449-472; *Classical Schottky groups of real type of genus two, III*, Tôhoku Math. J., **49** (1997), 485-502.
Jørgensen's inequality for classical Schottky groups of real type, J. Math. Soc. Japan **50** (1998), 945-968.
- [8] H. Sato, *One-parameter families of extreme groups for Jørgensen's inequality*, Contemporary Math. **256** (The First Ahlfors - Bers Colloquium) edited by I. Kra and B. Maskit, 2000, 271-287.
- [9] H. Sato, *Jørgensen's inequality for classical Schottky groups of real type*, J. Math. Soc. Japan **50** (1998), 945-968; *Jørgensen's inequality for classical Schottky groups of real type, II*, J. Math. Soc. Japan **53** (2001), 791-811.
- [10] H. Sato, *Jørgensen number of the Whitehead link group*, Bol. Soc. Math. Mexicana **10** (2004), 495-502.